Kazhdan-Lusztig-Polynome und unzerlegbare Bimoduln über Polynomringen

Wolfgang Soergel

29. März 2004

Zusammenfassung

Wir entwickeln eine Strategie zum Beweis der Positivität der Koeffizienten von Kazhdan-Lusztig-Polynomen für beliebige Coxeter-Gruppen. Mein Dank gilt Martin Härterich und Catharina Stroppel und dem Gutachter für Korrekturen zu vorläufigen Versionen dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Realisierung von Hecke-Algebren durch Bimoduln

Notation 1.1. Gegeben eine svelte additive Kategorie $\mathcal{A}$ bezeichne $\langle\mathcal{A}\rangle$ ihre spaltende Grothendieck-Gruppe, also die freie abelsche Gruppe über den

Objekten mit Relationen $M = M' + M''$ wann immer gilt $M \cong M' \oplus M''$. Für ein Objekt M bezeichne $\langle M \rangle$ seine Klasse in $\langle \mathcal{A} \rangle$.

Notation 1.2. Gegeben ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring A bezeichne $A\text{-mod}^{\mathrm{f}}_{\mathbb{Z}}$ die Kategorie aller endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-graduierten A-Moduln. Wir schreiben $M[n]$ für das Objekt M mit der um n verschobenen $\mathbb{Z}$-Graduierung, in Formeln $(M[n])_i = M_{i+n}$.

Bemerkung 1.3. Gegeben ein Körper k und eine endlich erzeugte kommutative nichtnegativ $\mathbb{Z}$-graduierte k-Algebra A mit $A_0 = k$ ist der Endomorphismenring eines endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-graduierten Moduls stets endlichdimensional, mithin gilt in $A\text{-mod}^{\mathrm{f}}_{\mathbb{Z}}$ der Satz von Krull-Schmid und die Isomorphieklassen unzerlegbarer Objekte bilden eine Basis von $\langle A\text{-mod}^{\mathrm{f}}_{\mathbb{Z}} \rangle$, so daß wir insbesondere haben $\langle N \rangle = \langle M \rangle \Leftrightarrow N \cong M$.

Notation 1.4. Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein Coxeter-System mit endlich vielen Erzeugern, $|\mathcal{S}| < \infty$. Sei $l : \mathcal{W} \to \mathbb{N}$ die zugehörige Längenfunktion und $\leq$ die Bruhat-Ordnung auf $\mathcal{W}$. Insbesondere bedeutet $x < y$ also $x \leq y$, $x \neq y$. Auf dem freien $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-Modul

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{W}, \mathcal{S}) = \bigoplus_{x \in \mathcal{W}} \mathbb{Z}[v, v^{-1}] T_x$$

über $\mathcal{W}$ gibt es genau eine Struktur einer assoziativen $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-Algebra mit $T_x T_y = T_{xy}$ falls $l(x) + l(y) = l(xy)$ und $T_s^2 = v^{-2} T_e + (v^{-2} - 1) T_s$ für alle $s \in \mathcal{S}$, siehe [Bou81], IV, §2, Exercice 23. Diese assoziative Algebra $\mathcal{H}$ heißt die Hecke-Algebra von $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$. Sie ist unitär mit Eins-Element T_e, wir kürzen oft $T_e = 1$ ab. Eigentlich ist es natürlicher, mit $q = v^{-2}$ zu arbeiten, und die ersten Abschnitte dieses Artikels würden dadurch auch an Klarheit gewinnen. In den späteren Abschnitten ist es jedoch für eine transparente Darstellung wichtig, eine Wurzel von q zur Verfügung zu haben. Die Hecke-Algebra kann auch beschrieben werden als die assoziative unitäre $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-Algebra mit den Erzeugern $\{T_s\}_{s \in \mathcal{S}}$, den quadratischen Relationen $T_s^2 = v^{-2} T_e + (v^{-2} - 1) T_s$ sowie den sogenannten Zopfrelationen $T_s T_t \ldots T_s = T_t T_s \ldots T_t$ bzw. $T_s T_t T_s \ldots T_t = T_t T_s T_t \ldots T_s$ wenn gilt $st \ldots s = ts \ldots t$ beziehungsweise $sts \ldots t = tst \ldots s$ für $s, t \in \mathcal{S}$.

Definition 1.5. Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein Coxetersystem. Bezeichne $\mathcal{T} \subset \mathcal{W}$ die Menge aller "Spiegelungen", d.h. die Menge aller Elemente von $\mathcal{W}$, die zu Elementen von $\mathcal{S}$ konjugiert sind. Unter einer **spiegelungstreuen** Darstellung unseres Coxetersystems verstehen wir eine Darstellung $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ in einem endlichdimensionalen Vektorraum über einem Körper k der Charakteristik $\operatorname{char} k \neq 2$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Unsere Darstellung ist treu.

2. Für $x \in \mathcal{W}$ gilt $\dim(V/V^x) = 1 \Leftrightarrow x \in \mathcal{T}$. In Worten haben genau die Spiegelungen aus $\mathcal{W}$ eine Fixpunktmenge der Kodimension 1 in V.

Bemerkung 1.6. Gegeben eine spiegelungstreue Darstellung sind die Elemente von $\mathcal{T}$ offensichtlich genau diejenigen Elemente von $\mathcal{W}$, die als Spiegelungen auf V operieren. Weiter kann man die Spiegelungen aus $\mathcal{W}$ sowohl an ihren Eigenräumen zum Eigenwert (-1) als auch an ihren Spiegelebenen erkennen, in Formeln gilt für $t, r \in \mathcal{T}$ also

$$V^t = V^r \quad \Leftrightarrow \quad V^{-t} = V^{-r} \quad \Leftrightarrow \quad t = r.$$

In der Tat fixiert die Komposition von zwei Spiegelungen mit demselben (-1)-Eigenraum bzw. derselben Spiegelebene eine Hyperebene und hat die Determinante 1, muß also nach Bedingung 2 die Identität auf V sein und dann nach Bedingung 1 die Identität in $\mathcal{W}$. Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß diejenige Darstellung einer Coxetergruppe, die die Darstellungen der affinen Weylgruppen auf den Cartan'schen von Kac-Moody-Algebren verallgemeinert, stets spiegelungstreu ist.

Definition 1.7. Eine Darstellung von $\mathcal{W}$, bei der Spiegelungen durch Spiegelungen operieren und bei der man die Spiegelungen an ihren (-1)-Eigenräumen unterscheiden kann, nennen wir eine **spiegelvektortreue** Darstellung.

Beispiel 1.8. Die geometrische Darstellung einer unendlichen Diedergruppe ist spiegelvektortreu. Sie ist aber nicht spiegelungstreu, da alle vom neutralen Element verschiedenen Elemente eine Fixpunktmenge der Kodimension eins haben, keineswegs nur die Spiegelungen.

Notation 1.9. Sei nun zur Vermeidung technischer Notation k ein unendlicher Körper und bezeichne $R = R(V)$ die k-Algebra der regulären Funktionen auf dem einer spiegelvektortreuen Darstellung V zugrundeliegenden Vektorraum. Wir versehen R mit einer $\mathbb{Z}$-Graduierung $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ derart, daß gilt $R_2 = V^*$ und $R_i = 0$ für ungerades i. Wieder wäre es natürlicher, mit der üblichen Graduierung zu arbeiten, und die ersten Abschnitte dieses Artikels würden dadurch an Klarheit gewinnen. Im weiteren Verlauf werden sich unsere Konventionen jedoch bezahlt machen. Bezeichne

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_V \subset R\text{-mod}_{\mathbb{Z}}\text{-} R$$

die Kategorie aller $\mathbb{Z}$-graduierten R-Bimoduln, die endlich erzeugt sind sowohl als Rechtsmoduln als auch als Linksmoduln, und auf denen die k-Operationen von rechts und links übereinstimmen. Das Tensorieren $\otimes_R$ über R macht $\langle \mathcal{R} \rangle$ zu einem Ring. Für $s \in \mathcal{S}$ bezeichne $R^s \subset R$ den Teilring der s-Invarianten.

Theorem 1.10. *Sei V eine spiegelvektortreue Darstellung eines Coxetersystems $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ über einem unendlichen Körper. Bezeichne $\mathcal{H}$ die Hecke-Algebra und R den Ring der polynomialen Funktionen auf V. Es gibt genau einen Ringhomomorphismus*

$$\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$$

derart, daß gilt $\mathcal{E}(v) = \langle R[1] \rangle$ und $\mathcal{E}(T_s + 1) = \langle R \otimes_{R^s} R \rangle \quad \forall s \in \mathcal{S}$.

Bemerkung 1.11. Dies Theorem ist eine Variante von Theorem 1 aus [Soe92]. Mir gefällt der hier gegebene Beweis besser, da er keine Kenntnisse über Demazure-Operatoren voraussetzt.

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar, da $\mathcal{H}$ von den $T_s + 1$ als $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-Algebra erzeugt wird. Den Beweis der Existenz müssen wir nur im Fall einer Diedergruppe führen, da ja $\mathcal{H}$ beschrieben werden kann durch Relationen, in denen jeweils nur die Erzeuger zu zwei einfachen Spiegelungen auftreten. Wir behandeln diesen Fall in Abschnitt 4. $\square$

Vermutung 1.12. Bezeichne $C'_x \in \mathcal{H}$ das durch $x \in \mathcal{W}$ parametrisierte Element der Kazhdan-Lusztig-Basis der Hecke-Algebra aus [KL79]. Sei V eine spiegelungstreue Darstellung von $\mathcal{W}$ über einem unendlichen Körper und sei R der Ring der regulären Funktionen auf V. So gibt es, zumindest im Fall $k = \mathbb{C}$, einen unzerlegbaren $\mathbb{Z}$-graduierten R-Bimodul $B_x \in \mathcal{R}$ mit

$$\mathcal{E}(C'_x) = \langle B_x \rangle.$$

Bemerkung 1.13. Ist $k = \mathbb{C}$ und $\mathcal{W}$ eine endliche Weylgruppe, so wird das gezeigt in [Soe92]. Ist $\mathcal{W}$ eine endliche Weylgruppe und $\operatorname{char} k$ mindestens die Coxeter-Zahl, so wird in [Soe00] gezeigt, daß die Vermutung äquivalent ist zu einem Teil der Vermutung von Lusztig zu Charakteren irreduzibler Darstellungen algebraischer Gruppen über k. Für den Fall der Operation der Weylgruppe auf der Cartan'schen einer affinen Kac-Moody-Algebra wird die Vermutung bewiesen in [Här99].

Bemerkung 1.14. In 5.3 konstruieren wir ein Linksinverses zu $\mathcal{E}$, dessen explizite Form zeigt, wie aus der vorstehenden Vermutung die Positivität aller Koeffizienten aller Kazhdan-Lusztig-Polynome folgt.

Bemerkung 1.15. In 6.14 zeigen wir, daß die "unzerlegbaren Bimoduln im Bild von $\mathcal{E}$" zumindest parametrisiert werden durch $\mathcal{W}$. Weiter bestimmen wir in 5.15 die Dimension der Hom-Räume zwischen zwei "Bimoduln im Bild von $\mathcal{E}$" und zeigen, daß unsere Formeln für diese Dimensionen gut mit der Vermutung 1.12 zusammenpassen.

Bemerkung 1.16. Noch offen sind insbesondere der Fall universeller Coxetergruppen (dort werden die KL-Polynome von Dyer [Dye88] beschrieben), und der Fall allgemeiner endlicher Coxetergruppen, der expliziten Rechnungen mit dem Computer zugänglich sein sollte.

Bemerkung 1.17. Verwandte Untersuchungen findet man in [BM01] und (teils unveröffentlichten) Arbeiten von Dyer [Dye94] und unveröffentlichten Arbeiten von Peter Fiebig.

2 Eine spiegelungstreue Darstellung

Proposition 2.1. *Gegeben eine endliche Menge $\mathcal{S}$ und eine Coxetermatrix vom Typ $\mathcal{S}$ der Gestalt $(m_{s,t})_{s,t\in\mathcal{S}}$ sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und seien gegeben linear unabhängige Vektoren $(e_s)_{s\in\mathcal{S}}$ in V und linear unabhängige Linearformen $(e_s^\vee)_{s\in\mathcal{S}}$ auf V derart, daß gilt*

$$\langle e_t, e_s^\vee\rangle = -2\cos(\pi/m_{s,t}) \quad \forall s,t\in\mathcal{S}.$$

Nehmen wir zusätzlich an, daß die Dimension von V kleinstmöglich ist, daß wir also eine Realisierung unserer Coxetermatrix im Sinne von [Kac90] vor uns haben, so liefert die Vorschrift $\rho(s)(v) = v - \langle v, e_s^\vee\rangle e_s$ eine spiegelungstreue Darstellung $\rho : \mathcal{W} \to \mathrm{GL}(V)$ unserer Coxetergruppe.

Beweis. Daß wir überhaupt eine Darstellung erhalten, d.h. daß die Zopfrelationen erfüllt sind folgt daraus, daß für jedes Paar s,t von einfachen Spiegelungen mit st von endlicher Ordnung unser Raum zerfällt in den Schnitt der Kerne von $e_s^\vee$ und $e_t^\vee$, der von s und t überhaupt nicht bewegt wird, und das Erzeugnis von e_s und e_t, auf dem s und t wie Erzeuger der üblichen Diedergruppe operieren.

Im allgemeinen ist der von den e_s aufgespannte Teilraum $E \subset V$ eine Unterdarstellung, die isomorph ist zur "natürlichen Darstellung" aus [Bou81], V.4.3 und die insbesondere bereits treu ist. Weiter operiert $\mathcal{W}$ trivial auf dem simultanen Kern K aller $e_s^\vee$ und die natürliche Operation auf $(V/K)^*$ ist wieder isomorph zur natürlichen Darstellung, d.h. die Operation auf (V/K) ist isomorph zur kontagredienten Darstellung E^* aus [Bou81], V.4.4. Unter unserer Minimalitätsbedingung an die Dimension von V haben wir sogar $K \subset E$ und damit eine Filtrierung durch Unterdarstellungen

$$0 \subset K \subset E \subset V.$$

Die Paarung $(e_s, e_t) = \frac{1}{2}\langle e_s, e_t^\vee\rangle$ definiert weiter eine invariante symmetrische Bilinearform auf E und eine nichtausgeartete invariante symmetrische Bilinearform auf E/K.

Sei nun $x \in \mathcal{W}$ ein Element, dessen Fixpunktmenge $V^x \subset V$ eine Hyperebene ist. Es gilt zu zeigen $x \in \mathcal{T}$. Bezeichne dazu $X \in \operatorname{End} V$ das Bild von x. Wir sind in einem der beiden Fälle $\det X = 1$ oder $\det X = -1$ und beginnen mit dem Fall $\det X = 1$. Wählen wir ein Komplement $\mathbb{R}c$ der Hyperebene V^x, so hat unser Endomorphismus X notwendig die Gestalt $X(v + \alpha c) = v + \alpha v_0 + \alpha c$ für ein festes $v_0 \in V^x$. Natürlich haben wir $V^x \supset K$. Da unsere Gruppe treu operiert auf E können wir $c \in E$ wählen und folgern $v_0 \in E$. Da auch $E^* \cong V/K$ eine treue Darstellung ist, folgt weiter $v_0 \notin K$. Jetzt arbeiten wir mit der invarianten Bilinearform auf E und folgern $(v + \alpha c, v + \alpha c) = (v + \alpha v_0 + \alpha c, v + \alpha v_0 + \alpha c)$ alias $2\alpha(v, v_0) + \alpha^2(2(c, v_0) + (v_0, v_0)) = 0$ für alle $v \in E$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Das liefert jedoch $(v, v_0) = 0$ für alle $v \in E$ im Widerspruch zu $v_0 \notin K$.

Der Fall $\det X = 1$ ist also unmöglich und es bleibt, den Fall $\det X = -1$ zu diskutieren. Dann operiert x notwendig als Spiegelung auf V und auch auf $V/K \cong E^*$. Da $\mathcal{W}$ treu und transitiv auf den Alkoven im Tits-Kegel operiert, kann die Fixpunktmenge von x keinen Alkoven im Tits-Kegel treffen. Betrachten wir den fundamentalen dominanten Alkoven im Tits-Kegel $C \subset E^*$ und sein Bild unter x, so werden C und xC nur von endlich vielen Spiegelungsebenen V^z zu gewissen $z \in \mathcal{T}$ getrennt. Ein geeignetes nichtleeres offenes Stück der Spiegelebene von x in E^* besteht nun aus Punkten auf Segmenten, die Punkte von C mit Punkten von xC verbinden. Dieses Stück müßte dann von unseren endlich vielen Spiegelebenen überdeckt werden, und das ist nur möglich, wenn die Spiegelebene von x schon die Spiegelebene einer Spiegelung z aus $\mathcal{T}$ ist. Dann bilden wir aber zx und finden uns im bereits ausgeschlossenen Fall $\det = 1$ wieder, es sei denn, es gilt $x = z$. □

3 Weitere Notationen und Formeln

Notation 3.1. Gegeben irgendeine endlichdimensionale Darstellung V einer Gruppe $\mathcal{W}$ betrachten wir für jedes $x \in \mathcal{W}$ seinen (vertauschten) Graphen

$$\operatorname{Gr}(x) = \{(x\lambda, \lambda) \mid \lambda \in V\} \subset V \times V$$

und bilden für eine beliebige endliche Teilmenge $A \subset \mathcal{W}$ in $V \times V$ die Zariski-abgeschlossene Teilmenge

$$\operatorname{Gr}(A) = \bigcup_{x \in A} \operatorname{Gr}(x).$$

Bemerkung 3.2. Für beliebige $y, z \in \mathcal{W}$ erhalten wir offensichtlich einen Isomorphismus

$$\operatorname{Gr}(y) \cap \operatorname{Gr}(z) \xrightarrow{\sim} V^{yz^{-1}}$$

vermittels der Projektion auf die erste Koordinate und es gilt

$$(\mathrm{Gr}(y) + \mathrm{Gr}(z)) \cap (V \times 0) = \mathrm{im}(yz^{-1} - \mathrm{id}) \times 0.$$

Notation 3.3. Sei nun k ein unendlicher Körper und bezeichne wie bisher R die k-Algebra der regulären Funktionen auf V. Wir kürzen stets $\otimes_k = \otimes$ ab. Identifizieren wir $R \otimes R$ mit den regulären Funktionen auf $V \times V$ durch die Vorschrift $(f \otimes g)(\lambda, \mu) = f(\lambda)g(\mu)$, so bilden die regulären Funktionen auf $\mathrm{Gr}(A)$ als Quotient von $R \otimes R$ in natürlicher Weise einen $\mathbb{Z}$-graduierten R-Bimodul, der endlich erzeugt ist als Rechtsmodul und als Linksmodul. Diesen $\mathbb{Z}$-graduierten R-Bimodul bezeichnen wir mit

$$R(A) = R(\mathrm{Gr}(A)) \in R\text{-mod}_{\mathbb{Z}}\text{-}R$$

und man prüft, daß er endlich erzeugt ist sowohl als Rechts- wie auch als Linksmodul über R. Für $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ schreiben wir auch $\mathrm{Gr}(A) = \mathrm{Gr}(x_1, \ldots, x_n)$ und $R(A) = R(x_1, \ldots, x_n)$ oder noch kürzer $R(x) = R_x$, $R(x, y) = R_{x,y}$. Für die Rechtsoperation von $\mathcal{W}$ auf R vereinbaren wir eine exponentielle Schreibweise, also $r^y(\lambda) = r(y\lambda)\ \forall y \in \mathcal{W},\ \lambda \in V,\ r \in R$. Bezeichnet $1_y \in R_y$ die konstante Funktion 1 auf $\mathrm{Gr}(y)$ alias das Bild von $1 \otimes 1$ in R_y, so gilt dann $r1_y = 1_y r^y$. Die Notationen sind gerade so gewählt, daß gilt $R(x) \otimes_R R(y) \cong R(xy)$ für alle $x, y \in \mathcal{W}$.

4 Der Fall einer Diedergruppe

Bemerkung 4.1. Ist $\mathcal{W}$ eine Diedergruppe, so haben nach [Hum90, 7.12(a)] die Elemente der selbstdualen Basis die Gestalt $C'_x = v^{l(x)} \sum_{y \leq x} T_y$. Wir geben einen Beweis dieser Tatsache als Bemerkung 4.4.

Theorem 4.2. *Sei $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ ein Coxetersystem mit zwei Erzeugern $|\mathcal{S}| = 2$ und V eine spiegelvektortreue Darstellung über einem unendlichen Körper. So ist der Homomorphismus von additiven Gruppen*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{E}: & \mathcal{H} & \to & \langle \mathcal{R} \rangle \\ & v^n C'_x & \mapsto & \langle R(\leq x) \rangle [n + l(x)] \end{array}$$

ein Ringhomomorphismus.

Bemerkung 4.3. Für jede Spiegelung $s : V \to V$ induziert die offensichtliche Abbildung $R \otimes R \twoheadrightarrow R(e, s)$ einen Isomorphismus $R \otimes_{R^s} R \xrightarrow{\sim} R(e, s)$. Um das zu sehen bemerkt man zunächst, daß unser Isomorphismus in spe jedenfalls eine Surjektion ist, und vergleicht dann die Dimensionen der homogenen

Komponenten, wobei man sich stützen mag auf die Eigenraumzerlegung $R = R^s \oplus R^s\alpha$ für $\alpha \in V^*$ eine Gleichung der Spiegelebene von s und auf eine kurze exakte Sequenz $R_s[-2] \hookrightarrow R(e,s) \twoheadrightarrow R_e$. Das vorstehende Theorem liefert also in der Tat die Existenzaussage in Theorem 1.10. Der hier wiedergegebene Beweis erweitert Argumente von I. Herrmann [Her99].

Beweis. Es reicht offensichtlich, für alle einfachen Spiegelungen s und alle $x \in \mathcal{W}$ die Gleichung

$$\mathcal{E}\left((T_s+1)\sum_{y\leq x} T_y\right) = \mathcal{E}(T_s+1)\,\mathcal{E}\left(\sum_{y\leq x} T_y\right)$$

zu zeigen. Setzen wir $A = \{y \in \mathcal{W} \mid y \leq x\}$, so sind $A \cup sA$ und $A \cap sA$ von der Gestalt $\{y \in \mathcal{W} \mid y \leq z\}$ für geeignetes z in unserer Diedergruppe $\mathcal{W}$, wenn nicht im zweiten Fall der Schnitt schlicht leer ist. Eine explizite Rechnung in der Hecke-Algebra zeigt nun

$$(T_s+1)\sum_{y\in A} T_y = \sum_{y\in A\cup sA} T_y \ + \ v^{-2}\sum_{y\in A\cap sA} T_y.$$

Setzen wir dies Resultat auf der linken Seite ein, so verwandelt sich unsere Gleichung in die Behauptung eines Isomorphismus von graduierten Bimoduln

$$R(A\cup sA) \oplus R(A\cap sA)[-2] \cong R \otimes_{R^s} R \otimes_R R(A),$$

der nach einem vorbereitenden Lemma als Proposition 4.6 gezeigt wird. □

Bemerkung 4.4. Um die in 4.1 behaupteten Formeln für die C'_x im Diederfall zu zeigen, müssen wir nur die Selbstdualität der $\gamma_x = v^{l(x)}\sum_{y\leq x} T_y$ nachweisen. Für jede einfache Spiegelung s mit $sx > x$ können wir jedoch eine der Gleichungen in unserem Beweis umschreiben zu

$$v(T_s+1)\gamma_x = \begin{cases} \gamma_{sx} + \gamma_z \text{ mit } z < x & \text{falls } l(x) > 1; \\ \gamma_{sx} & \text{falls } l(x) \leq 1, \end{cases}$$

und aus der Selbstdualität von $v(T_s+1)$ folgt so induktiv die Selbstdualität aller γ_x.

Lemma 4.5. *Sei V eine endlichdimensionale Darstellung einer Gruppe $\mathcal{W}$ über einem unendlichen Körper k einer Charakteristik $\neq 2$. Sei $A \subset \mathcal{W}$ eine endliche Teilmenge und $s \in \mathcal{W}$ ein Element mit $sA = A$, das auf V als Spiegelung operiert. So gilt:*

1. *Es gibt einen Isomorphismus von graduierten Bimoduln*

$$R \otimes_{R^s} R(A) \cong R(A) \oplus R(A)[-2].$$

2. *Für* $R(A)^+ \subset R(A)$ *die Invarianten unter der Operation von* $s \times \mathrm{id}$ *induziert die Multiplikation einen Isomorphismus*

$$R \otimes_{R^s} R(A)^+ \xrightarrow{\sim} R(A).$$

Beweis. Sei zunächst W ein beliebiger endlichdimensionaler k-Vektorraum. Jede Spiegelung $t : W \to W$ definiert eine Involution $t : R(W) \to R(W)$, und wählen wir eine Gleichung $\beta \in W^*$ der Spiegelebene W^t, so können wir den Operator

$$\partial_t = \partial_t^\beta : R(W) \to R(W), \quad f \mapsto \frac{f - tf}{2\beta}$$

definieren. Ist weiter $X \subset W$ eine Zariski-abgeschlossene t-stabile Teilmenge, so induziert t eine Involution auf $R(X)$ und wir erhalten eine Eigenraumzerlegung der Gestalt $R(X) = R(X)^+ \oplus R(X)^-$. Ist keine der irreduziblen Komponenten von X in der Spiegelebene W^t enthalten, so stabilisiert ∂_t den Kern der Surjektion $R(W) \twoheadrightarrow R(X)$ und induziert folglich eine Abbildung $\partial_t : R(X) \to R(X)$. Man sieht, daß dann ∂_t und die Multiplikation mit β zueinander inverse Isomorphismen $R(X)^+ \cong R(X)^-[2]$ von $\mathbb{Z}$-graduierten R^t-Moduln sind.

Sei nun speziell $W = V \times V$ und $t = s \times \mathrm{id}$ für unsere Spiegelung $s \in \mathcal{W}$. Wir wenden unsere Erkenntnisse an auf $X = \mathrm{Gr}(A)$ und erhalten eine Zerlegung $R(A) = R(A)^+ \oplus R(A)^-$ sowie einen Isomorphismus $R(A)^+ \cong R(A)^-[2]$ durch Multiplikation mit $\alpha \otimes 1 = \beta$ für $\alpha \in V^*$ eine Gleichung der Spiegelebene von s. Mit $R = R^s \oplus \alpha R^s$ folgt nun Teil 2, und mit unserer Zerlegung $R(A) = R(A)^+ \oplus R(A)^-$ und Teil 2 folgt dann auch Teil 1. □

Proposition 4.6. *Sei* $(\mathcal{W}, \mathcal{S})$ *ein Coxetersystem mit zwei Erzeugern* $|\mathcal{S}| = 2$ *und* V *eine spiegelvektortreue Darstellung von* $\mathcal{W}$ *über einem unendlichen Körper. Seien* $s \in \mathcal{S}$ *und* $x \in \mathcal{W}$ *gegeben und bezeichne* $A = \{y \in \mathcal{W} \mid y \leq x\}$ *die Menge aller Elemente unterhalb von* x*. So haben wir in* $R\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}\text{-}R$ *einen Isomorphismus*

$$R \otimes_{R^s} R(A) \cong R(A \cup sA) \oplus R(A \cap sA)[-2].$$

Beweis. Der Fall $A = sA$ in unserer Proposition hat sich schon durch das vorhergehende Lemma erledigt. Im Fall $A = \{e\}$ behauptet die Proposition den Isomorphismus $R(\leq s) \cong R \otimes_{R^s} R$ aus 4.3. Damit müssen wir nur noch den Fall $A \neq \{e\}$, $A \neq sA$ behandeln, also den Fall $A = \{y \in \mathcal{W} \mid y \leq x\}$ mit

$x \neq e$ und $sx > x$. Durch explizite Rechnung erhalten wir $A - sA = \{x, rx\}$ für eine von s verschiedene Spiegelung $r \in \mathcal{T}$.

Nach unseren Annahmen sind die (-1)-Eigenräume der Spiegelungen aus $\mathcal{W}$ paarweise verschieden und spannen eine zweidimensionale Unterdarstellung $U \subset V$ auf. Nach 3.2 gibt es eine Linearform $\beta \in V^* \times V^*$, die auf $\mathrm{Gr}(x)+\mathrm{Gr}(rx)$ verschwindet, nicht aber auf $U \times 0$. Wir betrachten die von den Nebenklassen $\overline{\beta}$ und $\overline{1}$ von β und 1 in $R(A)$ erzeugten $R^s \otimes R$-Untermoduln M, N und behaupten

1. $M \cong R(A \cap sA)^+[-2]$ in $R^s\text{-mod}_{\mathbb{Z}}\text{-}R$;
2. $N \cong R(A \cup sA)^+$ in $R^s\text{-mod}_{\mathbb{Z}}\text{-}R$;
3. $R(A) = M \oplus N$,

wobei der obere Index + die $(s \times \mathrm{id})$-Invarianten meint. Sobald das gezeigt ist, folgt die Proposition aus dem vorhergehenden Lemma 4.5. Wir müssen also nur noch unsere drei Behauptungen zeigen.

1. Um die erste Behauptung einzusehen beachten wir, daß für drei paarweise verschiedene Elemente $x, y, z \in \mathcal{W}$, deren Längen nicht alle dieselbe Parität haben, stets gilt

$$\mathrm{Gr}(x) + \mathrm{Gr}(y) + \mathrm{Gr}(z) \supset U \times 0.$$

Um das zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z = e$ und $x, y \in \mathcal{T}$ annehmen. Nach Abschnitt 3 gilt dann $(\mathrm{Gr}(x) + \mathrm{Gr}(e)) \cap (U \times 0) = V^{-x} \times 0$ und dasselbe gilt für y. Da wir nun unsere Darstellung spiegelvektortreu angenommen hatten, gilt $V^{-x} \neq V^{-y}$ und die Inklusion folgt. Für $y \notin \{x, rx\}$ gilt damit $\mathrm{Gr}(y)+\mathrm{Gr}(x)+\mathrm{Gr}(rx) \supset U \times 0$, insbesondere verschwindet die Funktion β nicht auf $\mathrm{Gr}(y)$ für $y \in A \cap sA$. Ein Element von $R(A)$ annulliert also $\overline{\beta}$ genau dann, wenn es auf $\mathrm{Gr}(A \cap sA)$ verschwindet. Wir folgern, daß die Multiplikation mit $\overline{\beta}$ einen Isomorphismus $R(A \cap sA)[-2] \xrightarrow{\sim} R(A)\overline{\beta}$ liefert. Das Bild von $R^s \otimes R$ in $R(A \cap sA)$ besteht nun aber genau aus den $(s \times \mathrm{id})$-Invarianten, folglich schränkt unser Isomorphismus ein zu einem Isomorphismus $R(A \cap sA)^+[-2] \xrightarrow{\sim} M$.

2. Der von $\overline{1}$ in $R(A \cup sA)$ erzeugte $R^s \otimes R$-Untermodul ist natürlich genau $R(A \cup sA)^+$ und die Einschränkung auf $\mathrm{Gr}(A)$ liefert eine Injektion

$$R(A \cup sA)^+ \hookrightarrow R(A).$$

Das zeigt die zweite Behauptung.

3. Wir zeigen zunächst $R(A) = M + N$. Bezeichnet $\alpha \in V^*$ eine Gleichung der Spiegelebene V^s, so gilt natürlich $R = R^s \oplus \alpha R^s$, also wird $R \otimes R$ als

$R^s \otimes R$-Modul erzeugt von $1 \otimes 1$ und $\alpha \otimes 1$. Es folgt, daß $R \otimes R$ über $R^s \otimes R$ auch erzeugt wird von $1 \otimes 1$ und beliebiges nicht unter $(s \times \mathrm{id})$ invariantes $\beta \in V^* \times V^*$. Unser β kann jedoch nicht unter $(s \times \mathrm{id})$ invariant sein, da es sonst auch noch auf $\mathrm{Gr}(sx)$ verschwinden müßte und damit nach der Inklusion aus dem Beweis von 1 auf ganz $U \times 0$. Damit folgt $R(A) = M + N$. Wir brauchen nur noch $M \cap N = 0$. Das kann man wie folgt einsehen: Für $y \in A \cap sA$ ist die Restriktion auf $\mathrm{Gr}(y, sy) = \mathrm{Gr}(y) \cup \mathrm{Gr}(sy)$ von jedem Element von N invariant unter $s \times \mathrm{id}$. Es reicht zu zeigen, daß die Restriktion von einem Element von M auf so ein $\mathrm{Gr}(y, sy)$ nur dann invariant ist unter $s \times \mathrm{id}$, wenn es auf $\mathrm{Gr}(y, sy)$ konstant Null ist. Es reicht dazu, wenn wir zeigen, daß die Restriktion von β auf $\mathrm{Gr}(y, sy)$ nicht invariant ist unter $s \times \mathrm{id}$ oder auch, daß die Restriktion von β auf $\mathrm{Gr}(y) + \mathrm{Gr}(sy)$ nicht invariant ist unter $s \times \mathrm{id}$. Die unter $s \times \mathrm{id}$ invarianten Linearformen auf $\mathrm{Gr}(y) + \mathrm{Gr}(sy)$ müssen jedoch verschwinden auf dem Teilraum $V^{-s} \times 0$ und $(\mathrm{Gr}(x) + \mathrm{Gr}(rx))$ schneidet $U \times 0$ in der davon verschiedenen Gerade $V^{-r} \times 0$. □

5 Von Bimoduln zurück zur Hecke-Algebra

Notation 5.1. Wir arbeiten von jetzt an stets mit einer festen spiegelungstreuen Darstellung eines Coxetersystems über einem unendlichen Körper und wollen in diesem Abschnitt ein Linksinverses zu unserem Ringhomomorphismus $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$ angeben. Wir beginnen mit einigen Notationen. Gegeben $B, B' \in \mathcal{R}$ bilden wir

$$\mathrm{Hom}(B, B') = \mathrm{Hom}_{R \otimes R}(B, B') \in \mathcal{R}.$$

Hier ist zu verstehen, daß die Links- bzw. Rechtsoperation von R auf dem Hom-Raum herkommt von der Links- bzw. Rechtsoperation auf B oder äquivalent auf B', in Formeln $(rf)(b) = f(rb) = r(f(b))$, $(fr)(b) = f(br) = (f(b))r$, $\forall r \in R$, $b \in B$, $f \in \mathrm{Hom}(B, B')$.

Notation 5.2. Gegeben ein endlichdimensionaler $\mathbb{Z}$-graduierter Vektorraum $V = \bigoplus V_i$ definieren wir seine graduierte Dimension

$$\underline{\dim} V = \sum (\dim V_i) v^{-i} \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$$

und für einen endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-graduierten R-Rechtsmodul M definieren wir seinen graduierten Rang durch die Vorschrift

$$\underline{\mathrm{rk}} M = \underline{\dim}(M/MR_{>0}) \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}].$$

Es gilt also $\underline{\dim}(V[1]) = v(\underline{\dim} V)$ und $\underline{\mathrm{rk}}(M[1]) = v(\underline{\mathrm{rk}} M)$. Natürlich ist unser graduierter Rang nur für freie Moduln ein vernünftiger Begriff, und wir werden ihn auch nur für freie Moduln verwenden. Mit $\overline{\underline{\mathrm{rk}}}M$ bezeichnen wir das Bild von $\underline{\mathrm{rk}}M$ unter der Substitution $v \mapsto v^{-1}$. Das folgende Theorem motiviert den ganzen Abschnitt.

Theorem 5.3. *Unsere Abbildung $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$ hat als Linksinverse die Abbildung $\langle \mathcal{R} \rangle \to \mathcal{H}$ gegeben durch die Vorschrift*

$$\langle B \rangle \mapsto \sum_{x \in \mathcal{W}} \overline{\underline{\mathrm{rk}}}\, \mathrm{Hom}(B, R_x)\, T_x.$$

Beweis. Dies Theorem ist eine direkte Konsequenz aus 5.7 und 5.16, die im Folgenden ohne Rückgriff auf das Theorem bewiesen werden. □

Definition 5.4. Wir definieren für jeden R-Bimodul B und jede Teilmenge $A \subset \mathcal{W}$ den Unterbimodul

$$\Gamma_A B = \{b \in B \mid \mathrm{supp}\, b \subset \mathrm{Gr}(A)\}$$

aller Elemente mit Träger in $\mathrm{Gr}(A)$. Wir setzen $\Gamma_{\geq i} B = \Gamma_{\{x \in \mathcal{W} | l(x) \geq i\}} B$ und definieren die Kategorie

$$\mathcal{F}_\Delta \subset \mathcal{R}$$

als die volle Unterkategorie aller graduierten Bimoduln $B \in \mathcal{R}$ derart, daß der Untermodul $\Gamma_{\geq i} B$ für hinreichend großes i verschwindet und daß der Quotient $\Gamma_{\geq i} B / \Gamma_{\geq i+1} B$ für alle i isomorph ist zu einer endlichen direkten Summe von graduierten Bimoduln der Form $R_x[\nu]$ mit $l(x) = i$ und $\nu \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 5.5. Sicher ist $B \mapsto \Gamma_{\geq i} B / \Gamma_{\geq i+1} B$ additiv in B, folglich ist $\mathcal{F}_\Delta$ stabil unter dem Bilden von endlichen direkten Summen und mit Krull-Schmid 1.3 auch unter dem Bilden von direkten Summanden.

Notation 5.6. Es ist nun bequem, die graduierten Bimoduln

$$\Delta_x = R_x[-l(x)]$$

einzuführen und in der Hecke-Algebra mit $\tilde{T}_x = v^{l(x)} T_x$ zu arbeiten. Für die Vielfachheit des Summanden $\Delta_x[\nu]$ in einer und jeder Zerlegung von $\Gamma_{\geq i} B / \Gamma_{\geq i+1} B$ für $i = l(x)$ vereinbaren wir die Notation $(B : \Delta_x[\nu])$. Schließlich vereinbaren wir die Abkürzung $R[1] \otimes_{R^s} M = \theta_s M$.

Proposition 5.7. *Sei $s \in \mathcal{S}$ eine einfache Spiegelung.*

1. *Mit B liegt auch $R \otimes_{R^s} B$ in $\mathcal{F}_\Delta$.*

2. *Definieren wir die Abbildung $h_\Delta : \mathcal{F}_\Delta \to \mathcal{H}$ durch die Vorschrift $B \mapsto \sum_{x,\nu}(B : \Delta_x[\nu])v^\nu \tilde{T}_x$, so kommutieren für alle $s \in \mathcal{S}$ die beiden Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\Delta & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle \theta_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\tilde{T}_s+v)\cdot} \\ \mathcal{F}_\Delta & \longrightarrow & \mathcal{H} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\Delta & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle [1]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v\cdot} \\ \mathcal{F}_\Delta & \longrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

3. *Unsere Abbildung $\mathcal{E}$ faktorisiert über eine Abbildung $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{F}_\Delta \rangle$ und unser $h_\Delta : \langle \mathcal{F}_\Delta \rangle \to \mathcal{H}$ ist zu diesem $\mathcal{E}$ linksinvers.*

Beweis. Zum Beweis dieser Proposition benötigen wir

Lemma 5.8. *Sei W ein endlichdimensionaler Vektorraum und seien $U, V \subset W$ zwei affine Teilräume. Nur dann ist $\mathrm{Ext}^1_{R(W)}(R(U), R(V))$ verschieden von Null, wenn gilt $V \cap U = V$ oder wenn $V \cap U$ eine Hyperebene in V ist. Im letzteren Fall ist $\mathrm{Ext}^1_{R(W)}(R(U), R(V))$ ein freier $R(U \cap V)$-Modul vom Rang Eins, erzeugt von der Klasse einer beliebigen kurzen exakten Sequenz der Form*

$$R(V)[-2] \overset{\alpha}{\hookrightarrow} R(U \cup V) \twoheadrightarrow R(U)$$

für $\alpha \in W^*$ mit $\alpha|_U = 0$, $\alpha|_V \neq 0$.

Beweis. Sind F und G freie Moduln von endlichem Rang über den k-Algebren A und B und sind M und N irgendwelche Moduln über A und B, so gilt offensichtlich (siehe [Bou70], I §4 und II §11)

$$\mathrm{Hom}_A(F, M) \otimes \mathrm{Hom}_B(G, N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A\otimes B}(F \otimes G, M \otimes N).$$

Sind unsere Algebren noethersch und M' bzw. N' endlich erzeugte Moduln über A bzw. B, so finden wir Auflösungen $F^\bullet \twoheadrightarrow M'$ bzw. $G^\bullet \twoheadrightarrow N'$ mit F^i bzw. G^j frei von endlichem Rang über A bzw. B. Dann wird $F^\bullet \otimes G^\bullet$ eine freie Auflösung von $M' \otimes N'$ und wir folgern

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^n_{A\otimes B}(M' \otimes N', M \otimes N) &= H^n \,\mathrm{Hom}_{A\otimes B}(F^\bullet \otimes G^\bullet, M \otimes N) \\ &= H^n(\mathrm{Hom}_A(F^\bullet, M) \otimes \mathrm{Hom}_B(G^\bullet, N)) \\ &= \textstyle\bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ext}^i_A(M', M) \otimes \mathrm{Ext}^j_B(N', N) \end{aligned}$$

Wir können uns so im Lemma auf die Fälle mit $\dim_k W = 1$ zurückziehen, und diese behandelt man leicht explizit. Genauer dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit U und V linear annehmen und finden eine Zerlegung $W = S \oplus U' \oplus V' \oplus W'$ mit $U = S \oplus U'$ und $V = S \oplus V'$. Notieren wir die Dimensionen $\dim W = s + u + v + w$, so erhalten wir $\mathrm{Ext}^\bullet_{R(W)}(R(U), R(V)) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_{k[X]}(k[X], k[X])^s \otimes \mathrm{Ext}^\bullet_{k[X]}(k[X], k)^u \otimes \mathrm{Ext}^\bullet_{k[X]}(k, k[X])^v \otimes \mathrm{Ext}^\bullet_{k[X]}(k, k)^w$. Damit kann es nur im Fall $v \leq 1$ überhaupt Ext^1 geben und im Fall $v = 1$ ist Ext^1 gerade $k[X]^s$. □

Jetzt zeigen wir die Proposition. Sei $s \in \mathcal{S}$ unsere feste einfache Spiegelung. Sicher können wir unsere Filtrierung $\Gamma_{\geq i}$ von B verfeinern durch gewisse $\Gamma_{\geq j} B$ mit $j \in \mathbb{Z}+0,5$ derart, daß für alle $i \in \mathbb{Z}$ die Quotienten $\Gamma_{\geq i} B / \Gamma_{\geq i+0,5} B$ bzw. $\Gamma_{\geq i-0,5} B / \Gamma_{\geq i} B$ Summen sind von $R(x)[\nu]$ mit $x > sx$ bzw. $x < sx$. Mit diesen Wahlen unterscheiden sich die Parameter x, y zweier möglicher Subquotienten von $\Gamma_{\geq i-0,5} B / \Gamma_{\geq i+0,5} B$ nur dann um eine Spiegelung, wenn gilt $y = sx$: In der Tat haben wir für eine beliebige Spiegelung t stets $tx > x$ oder $tx < x$, und aus $sy > y < x > sx$ folgt $y \leq sx$ nach einem Resultat von Deodhar, der sogenannten Eigenschaft Z von Coxetergruppen.

Alle Erweiterungen in $\operatorname{Ext}^1_{R \otimes R}(R_x, R_{sx})$ sterben aber unter der Restriktion auf $R^s \otimes R$. In der Tat spaltet die Restriktion $R_{x,sx} \twoheadrightarrow R_x$ über $R^s \otimes R$, da sie in den Notationen von 4.5 einen Isomorphismus $R^+_{x,sx} \xrightarrow{\sim} R_x$ induziert. Nach Lemma 5.8 ist damit die Einschränkung auf $R^s \otimes R$ von $\Gamma_{\geq i-0,5} B / \Gamma_{\geq i+0,5} B$ isomorph zu einer direkten Summe von Kopien von gewissen $R_x[\nu]$ mit $x > sx$ und $l(x) = i$, und diese treten auf mit Vielfachheit $(B : R_x[\nu]) + (B : R_{sx}[\nu])$. Tensorieren wir nun wieder hoch vermittels $R \otimes_{R^s}$ und beachten die kurzen exakten Sequenzen $R_x[-2] \hookrightarrow R \otimes_{R^s} R_x \twoheadrightarrow R_{sx}$, so erhalten wir die erste Behauptung sowie (immer unter der Annahme $x > sx$) die Formeln

$$\begin{array}{lcll} (R \otimes_{R^s} B : R_x[\nu]) & = & (B : R_x[\nu+2]) & + (B : R_{sx}[\nu+2]) \\ (R \otimes_{R^s} B : R_{sx}[\nu]) & = & (B : R_x[\nu]) & + (B : R_{sx}[\nu]) \end{array}$$

Das können wir umschreiben zu

$$\begin{array}{lcll} (\theta_s B : \Delta_x[\nu]) & = & (B : \Delta_x[\nu+1]) & + (B : \Delta_{sx}[\nu]) \\ (R[1] \otimes_{R^s} B : \Delta_{sx}[\nu]) & = & (B : \Delta_x[\nu]) & + (B : \Delta_{sx}[\nu-1]) \end{array}$$

Schreiben wir nun ein Element $H \in \mathcal{H}$ nur für diesen Beweis in der Form $H = \sum_{x,\nu} (H : v^\nu \tilde{T}_x)\, v^\nu \tilde{T}_x$, so gilt in der Hecke-Algebra ganz analog

$$\begin{array}{lcll} ((\tilde{T}_s + v)H : v^\nu \tilde{T}_x) & = & (H : v^{\nu+1} \tilde{T}_x) & + (H : v^\nu \tilde{T}_{sx}) \\ ((\tilde{T}_s + v)H : v^\nu \tilde{T}_{sx}) & = & (H : v^\nu \tilde{T}_x) & + (H : v^{\nu-1} \tilde{T}_{sx}) \end{array}$$

Das zeigt die zweite Behauptung. Um die letzte Behauptung zu zeigen, bemerken wir zunächst, daß wir $\langle \mathcal{R} \rangle$ vermittels des Ringhomomorphismus $\mathcal{E}$ aus 1.10 insbesondere als $\mathcal{H}$-Linksmodul auffassen können. Der erste Teil der Proposition sagt dann, daß $\langle \mathcal{F}_\Delta \rangle \subset \langle \mathcal{R} \rangle$ ein $\mathcal{H}$-Untermodul ist und der Zweite, daß die Abbildung $h_\Delta : \langle \mathcal{F}_\Delta \rangle \to \mathcal{H}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Moduln ist. Da $\mathcal{E}(1) = \langle R_e \rangle$ zu $\mathcal{F}_\Delta$ gehört, faktorisiert $\mathcal{E}$ damit in der Tat über $\langle \mathcal{F}_\Delta \rangle$, und da $h_\Delta \circ \mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Moduln ist, der die Eins auf die Eins wirft, muß diese Verknüpfung bereits die Identität sein. $\square$

Um Theorem 5.3 zu zeigen, brauchen wir auch einen "dualen" Zugang. Genauer betrachten wir die Filtrierung unserer Bimoduln durch die $\Gamma_{\leq i}B = \Gamma_{\{x \in \mathcal{W} | l(x) \leq i\}}B$ und definieren die Kategorie

$$\mathcal{F}_{\nabla} \subset \mathcal{R}$$

als die volle Unterkategorie aller graduierten Bimoduln $B \in \mathcal{R}$ derart, daß die Quotienten $\Gamma_{\leq i}B/\Gamma_{\leq i-1}B$ für fast alle i verschwinden und für alle i isomorph sind zu einer endlichen direkten Summe von graduierten Bimoduln der Form $R_x[\nu]$ mit $l(x) = i$ und $\nu \in \mathbb{Z}$. In diesem Zusammenhang ist es bequem und natürlich, mit

$$\nabla_x = R_x[l(x)]$$

zu arbeiten. Für die Vielfachheit von $\nabla_x[\nu]$ in einer Zerlegung in eine direkte Summe von $\Gamma_{\leq l(x)}B/\Gamma_{\leq l(x)-1}B$ vereinbaren wir die Notation $(B : \nabla_x[\nu])$.

Man beachte, daß sich die Multiplizitäten $(B : \nabla_x[\nu])$ und $(B : \Delta_x[\nu])$ auf Subquotienten in verschiedenen Filtrierungen beziehen. Auch für $B \in \mathcal{F}_\Delta \cap \mathcal{F}_\nabla$ sind also die Multiplizitäten $(B : \Delta_x[l(x) + \nu])$ und $(B : \nabla_x[-l(x) + \nu])$ im allgemeinen verschieden. Ganz analog wie eben haben wir nun

Proposition 5.9. *Sei $s \in \mathcal{S}$ eine einfache Spiegelung.*

1. *Mit B liegt auch $R \otimes_{R^s} B$ in $\mathcal{F}_\nabla$.*

2. *Definieren wir die Abbildung $h_\nabla : \mathcal{F}_\nabla \to \mathcal{H}$ durch die Vorschrift $B \mapsto \sum_{x,\mu}(B : \nabla_x[\mu])\ v^{-\mu}\tilde{T}_x$, so kommutieren für alle $s \in \mathcal{S}$ die beiden Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\nabla & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle \theta_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\tilde{T}_s+v)\cdot} \\ \mathcal{F}_\nabla & \longrightarrow & \mathcal{H} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\nabla & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle [1]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v^{-1}\cdot} \\ \mathcal{F}_\nabla & \longrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

3. *Bezeichnet $d : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ die Involution mit $d(\tilde{T}_s + v) = \tilde{T}_s + v$, $d(v) = v^{-1}$, so ist $d \circ h_\nabla$ linksinvers zu $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{F}_\nabla \rangle$.*

Beweis. Wir betrachten den Funktor

$$D = \mathrm{Hom}_{-R}(\ ,R) : \mathcal{R} \to R\text{-mod}_{\mathbb{Z}}\text{-}R,$$

wo wir unseren Raum von Homomorphismen von R-Rechtsmoduln versehen mit der offensichtlichen $\mathbb{Z}$-Graduierung und die Rechts- bzw. Linksoperation auf DB definieren vermittels der Rechts- bzw. Linksoperation auf einem Bimodul B, in Formeln $(rf)(b) = f(rb)$ und $(fr)(b) = f(br)$ für alle $b \in B$,

$r \in R$, $f \in DB$. Ich will es vermeiden, im allgemeinen zu diskutieren, ob ein Objekt aus $\mathcal{R}$ unter D wieder in $\mathcal{R}$ landet. In jedem Fall haben wir $DR_x \cong R_x$ und $D(M[\nu]) = (DM)[-\nu]$, unser Funktor induziert eine Äquivalenz von Kategorien $D : \mathcal{F}_\nabla \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_\Delta^{\mathrm{opp}}$ und es gilt offensichtlich $h_\nabla = h_\Delta \circ D$. Es bleibt also, für alle $M \in \mathcal{F}_\nabla$ einen Isomorphismus $\theta_s DM \cong D\theta_s M$ nachzuweisen. Dazu zeigen wir erst einmal

Proposition 5.10. *1. Die Funktoren von R^s-$\mathrm{mod}_\mathbb{Z}$ nach R-$\mathrm{mod}_\mathbb{Z}$ mit $M \mapsto R[2] \otimes_{R^s} M$ und $M \mapsto \mathrm{Hom}_{R^s}(R, M)$ sind natürlich äquivalent.*

2. Der Funktor $R[1]\otimes_{R^s} : R$-$\mathrm{mod}_\mathbb{Z} \to R$-$\mathrm{mod}_\mathbb{Z}$ ist selbstadjungiert.

Beweis. Da R frei ist von endlichem Rang als R^s-Modul, läßt sich unser Hom-Funktor auch schreiben in der Form

$$\mathrm{Hom}_{R^s}(R, -) = \mathrm{Hom}_{R^s}(R, R^s) \otimes_{R^s} -.$$

Nun ist genauer R frei über R^s mit Basis $1, \alpha$ für α eine Gleichung der Spiegelebene, $s(\alpha) = -\alpha$. Die duale Basis von $\mathrm{Hom}_{R^s}(R, R^s)$ über R^s notieren wir $1^*, \alpha^*$. Die Multiplikation mit $\alpha \in R$ wird in dieser Basis gegeben durch $\alpha\alpha^* = 1^*$, $\alpha 1^* = \alpha^2\alpha^*$. Die Wahl von α definiert folglich einen Isomorphismus von R-Moduln

$$R[2] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R^s}(R, R^s), 1 \mapsto \alpha^*, \alpha \mapsto 1^*,$$

und die erste Behauptung ist bewiesen. Die zweite Behauptung folgt, da ja unsere beiden Funktoren aus der ersten Behauptung bis auf eine Verschiebung der Graduierung gerade die beiden Adjungierten der Einschränkung auf R^s sind. □

Damit erhalten wir in der Tat Isomorphismen

$$\begin{aligned} \theta_s(DM) &\cong R[1] \otimes_{R^s} DM \\ &\cong \mathrm{Hom}_{R^s}(R[1], \mathrm{Hom}_{-R}(M, R)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{-R}(\theta_s M, R) \\ &\cong D(\theta_s M) \end{aligned}$$

Der dritte Teil der Proposition 5.9 folgt wieder daraus, daß $d \circ h_\nabla \circ \mathcal{E} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{H}$-Linksmoduln ist mit $1 \mapsto 1$. □

Definition 5.11. Wir definieren nun die Kategorie $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$ als die Kategorie aller graduierten Bimoduln $B \in \mathcal{R}$, deren Klasse $\langle B \rangle$ im Bild unseres Morphismus $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$ liegt, und nennen die Objekte von $\mathcal{B}$ die **speziellen Bimoduln**.

Bemerkung 5.12. Sicher ist $\mathcal{B}$ stabil unter endlichen direkten Summen und unter Verschiebungen der Graduierung. Erst später in 6.14 werden wir zeigen können, daß $\mathcal{B}$ auch stabil ist unter dem Bilden von direkten Summanden. Um ein Kriterium dafür zu erhalten, wann ein Bimodul B zu $\mathcal{B}$ gehört, betrachten wir zunächst für eine beliebige endliche Sequenz $\underline{s} = (r, \ldots, t)$ von einfachen Spiegelungen in der Hecke-Algebra das Element $b(\underline{s}) = (T_r + 1) \ldots (T_t + 1)$ und bilden den Bimodul

$$B(\underline{s}) = R \otimes_{R^r} \ldots R \otimes_{R^t} R.$$

Lemma 5.13. *Ein graduierter Bimodul $B \in \mathcal{R}$ ist speziell genau dann, wenn es Objekte $C, D \in \mathcal{R}$ gibt, die jeweils endliche direkte Summen sind von Objekten der Gestalt $B(\underline{s})[n]$ und so, daß gilt*

$$B \oplus C \cong D$$

Beweis. Da gilt $\langle B(\underline{s})[n] \rangle = \mathcal{E}(v^n b(\underline{s}))$ sind die $B(\underline{s})[n]$ speziell. Das zeigt, daß unser Kriterium hinreichend ist. Da die $v^n b(\underline{s})$ schon $\mathcal{H}$ erzeugen als abelsche Gruppe, ist es auch notwendig. □

Bemerkung 5.14. Insbesondere faktorisiert $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \langle \mathcal{R} \rangle$ über die spaltende Grothendieckgruppe $\langle \mathcal{B} \rangle$ der additiven Kategorie $\mathcal{B}$ und aus 5.7 und 5.9 folgt $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_\Delta \cap \mathcal{F}_\nabla$.

Theorem 5.15. *Für $M \in \mathcal{F}_\Delta$, $N \in \mathcal{B}$ und desgleichen für $M \in \mathcal{B}$, $N \in \mathcal{F}_\nabla$ ist* $\operatorname{Hom}(M, N)$ *graduiert frei als R-Rechtsmodul vom Rang*

$$\underline{\operatorname{rk}} \operatorname{Hom}(M, N) = \sum_{x,\nu,\mu} (M : \Delta_x[\nu])(N : \nabla_x[\mu]) v^{\mu-\nu}.$$

Beweis. Wir behandeln nur den Fall $M \in \mathcal{F}_\Delta$, $N \in \mathcal{B}$, der andere Fall geht genauso. Bezeichne $i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ die Antiinvolution mit $i(v) = v$, $i(\tilde{T}_x) = \tilde{T}_{x^{-1}}$. Wir betrachten die symmetrische $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-bilineare Paarung $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, die jedem Paar (F, G) den Koeffizienten von $\tilde{T}_e = T_e$ in der Darstellung von $i(F)G$ als Linearkombination der T oder äquivalent der $\tilde{T}$ zuordnet. Sie kann auch explizit beschrieben werden durch $\langle \tilde{T}_x, \tilde{T}_y \rangle = \delta_{xy}$, vergleiche [Lus85],§1.4. Die gesuchte Formel erhält mit dieser Notation die Gestalt

$$\overline{\underline{\operatorname{rk}}} \operatorname{Hom}(M, N) = \langle h_\Delta M, h_\nabla N \rangle.$$

Nach 5.13 dürfen wir uns hier zunächst einmal auf den Fall $N = B(\underline{s})$ zurückziehen. Wir erkennen weiter mithilfe von 5.10, daß unsere Formel richtig ist für das Paar $(R \otimes_{R^s} M, N)$ genau dann, wenn sie richtig ist für das Paar

$(M, R \otimes_{R^s} N)$. Ohne alle Probleme sehen wir auch, daß unsere Formel richtig ist für das Paar $(M[1], N)$ genau dann, wenn sie richtig ist für das Paar $(M, N[-1])$. Mit diesen Erkenntnissen können wir uns dann schließlich sogar auf den Fall $N = R_e$ zurückziehen, und der ist offensichtlich. □

Korollar 5.16. *Sei $B \in \mathcal{B}$ einer unserer speziellen Bimoduln. So gilt*

$$\begin{array}{rcl} h_\Delta(B) & = & \sum_{x\in\mathcal{W}} \underline{\overline{\mathrm{rk}}} \operatorname{Hom}(B, R_x)\, T_x, \\ h_\nabla(B) & = & \sum_{x\in\mathcal{W}} \underline{\overline{\mathrm{rk}}} \operatorname{Hom}(R_x, B)\, T_x. \end{array}$$

Beweis. Nach dem vorhergehenden Theorem 5.15 haben wir

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathrm{rk}} \operatorname{Hom}(B, R_x) & = & \underline{\mathrm{rk}} \operatorname{Hom}(B, \nabla_x[-l(x)]) \\ & = & \sum_\nu (B : \Delta_x[\nu]) v^{-l(x)-\nu} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathrm{rk}} \operatorname{Hom}(R_x, B) & = & \underline{\mathrm{rk}} \operatorname{Hom}(\Delta_x[l(x)], B) \\ & = & \sum_\mu (B : \nabla_x[\mu]) v^{-l(x)+\mu} \end{array}$$

und das Korollar folgt damit aus den Definitionen. □

6 Klassifikation der unzerlegbaren speziellen Bimoduln

Notation 6.1. Wir arbeiten weiter mit einer spiegelungstreuen Darstellung über einem unendlichen Körper. Für $B \in \mathcal{B}$ und $y \in \mathcal{W}$ kürzen wir ab $\Gamma_{\leq y} B / \Gamma_{<y} B = \Gamma_{\bar{y}}^{\leq} B$, ebenso auch $\Gamma_{\geq y} B / \Gamma_{>y} B = \Gamma_{\bar{y}}^{\geq} B$ und $B / \Gamma_{\neq y} B = \Gamma^y B$.

Bemerkung 6.2. Gegeben ein Bimodul mit einer endlichen Filtrierung durch Unterbimoduln mit zu geeigneten R_x isomorphen Subquotienten ist der Träger jedes Schnittes $s \in B$ eine Vereinigung von Graphen von Elementen unserer Coxetergruppe. Um das zu zeigen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\operatorname{supp} s$ irreduzibel annehmen. Nun liefert aber jedes von Null verschiedene $s \in B$ ein von Null verschiedenes Element $\bar{s}$ in einem geeigneten Subquotienten der Δ-Fahne, und es folgt erst $\operatorname{supp} s \supset \operatorname{supp} \bar{s} = \operatorname{Gr}(x)$ für geeignetes $x \in W$ und dann wegen der Irreduzibilität von $\operatorname{supp} s$ sogar $\operatorname{supp} s = \operatorname{Gr}(x)$. Insbesondere haben wir $\Gamma_y B \cap \Gamma_{\neq y} B = 0$ und damit Einbettungen $\Gamma_y B \hookrightarrow \Gamma_{\bar{y}}^{\leq} B$ sowie $\Gamma_{\bar{y}}^{\geq} B \hookrightarrow \Gamma^y B$. Unter denselben Voraussetzungen an B ändert auch die Multiplikation von rechts mit einem von Null verschiedenen Element $p \in R$ den Träger nicht. Wir haben also $(\Gamma_A B)p = \Gamma_A(Bp)$ und dann auch $(\Gamma_{\bar{y}}^{\geq} B)p \cong \Gamma_{\bar{y}}^{\geq}(Bp)$ und dergleichen. Wir werden uns diese Identifikationen zunutze machen, um die Klammern bei derartigen Ausdrücken wegzulassen.

Lemma 6.3. *Sei $B \in \mathcal{F}_\nabla$ gegeben und sei $y_0, y_1, y_2, \ldots$ eine Aufzählung der Elemente von $\mathcal{W}$ derart, daß in der Bruhat-Ordnung größere Elemente stets auch einen größeren Index haben. Bezeichne $C(k) = \{y_0, \ldots, y_k\}$ die Menge der ersten k Elemente in unserer Aufzählung und sei $y_k = y$. So induziert die offensichtliche Abbildung einen Isomorphismus*

$$\Gamma_{\leq y} B / \Gamma_{< y} B \xrightarrow{\sim} \Gamma_{C(k)} B / \Gamma_{C(k-1)} B,$$

beide Seiten sind direkte Summen von Objekten der Gestalt $\nabla_y[\nu]$, und ein $\nabla_y[\nu]$ kommt in diesem Quotienten genau $(B : \nabla_y[\nu])$-mal als direkter Summand vor. Analoges gilt für $\mathcal{F}_\Delta$.

Beweis. Ist $z_0, z_1, z_2, \ldots$ eine Aufzählung der Elemente von $\mathcal{W}$ derart, daß die Folge $l(z_0), l(z_1), l(z_2), \ldots$ der Längen monoton wächst, und setzen wir $A(j) = \{z_0, z_1, \ldots, z_j\}$, so bilden die $\Gamma_{A(j)} B$ eine Verfeinerung unserer Filtrierung $\Gamma_{\leq i} B$ und $\Gamma_{A(j)} B / \Gamma_{A(j-1)} B$ ist eine Summe von $(B : \nabla_{z_j}[\nu])$ Kopien von gewissen $\nabla_{z_j}[\nu]$. Zwischen je zwei Aufzählungen der Elemente von $\mathcal{W}$ derart, daß in der Bruhat-Ordnung größere Elemente stets auch einen größeren Index haben, können wir jedoch offensichtlich hin- und hergehen in endlich vielen Schritten, von denen jeder nur zwei benachbarte unvergleichbare Elemente vertauscht. Da sich unvergleichbare Elemente nicht um eine Spiegelung unterscheiden können, gibt es bei jedem Schritt kein Ext^1 zwischen den entsprechenden Subquotienten, folglich liefern die Filtrierungen vor und nach jedem dieser Schritte bis auf Reihenfolge dieselben Subquotienten. Der Subquotient $\Gamma_{C(k)} B / \Gamma_{C(k-1)} B$ mit $y_k = z_j$ ist also isomorph zu $\Gamma_{A(j)} B / \Gamma_{A(j-1)} B$, mithin ist $\Gamma_{\leq y} B / \Gamma_{< y} B$ eine Summe von verschobenen Kopien von ∇_y, und zwar kommt $\nabla_y[\nu]$ genau $(B : \nabla_y[\nu])$-mal vor. □

Proposition 6.4. *Gegeben $B \in \mathcal{B}$ und $y \in \mathcal{W}$ sind die eben definierten $\Gamma^{\leq}_y B$, $\Gamma^{\geq}_y B$ und $\Gamma^y B$ ebenso wie $\Gamma_y B$ graduiert freie R-Rechtsmoduln, auf denen die Operation von $R \otimes R$ faktorisiert über R_y.*

Beweis. Für die ersten beiden Moduln unserer Liste folgt das leicht aus 6.3. Für den Letzten folgt dann aus der Einbettung $\Gamma_y B \hookrightarrow \Gamma^{\leq}_y B$ nach 6.2, daß die Operation von $R \otimes R$ über R_y faktorisiert, daß also das Auswerten bei 1_y einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}(R_y, B) \xrightarrow{\sim} \Gamma_y B$ liefert, der mit 5.15 dann die Freiheit von $\Gamma_y B$ zeigt. Die Behauptung für $\Gamma^y B$ schließlich folgt für $y = e$ aus $B \in \mathcal{F}_\Delta$. Im allgemeinen beachten wir, daß aus der Definition der Kategorie $\mathcal{B}$ und 5.7 sogar folgt $B \otimes_R R_z \in \mathcal{F}_\Delta$ für alle $z \in \mathcal{W}$. Wenden wir diese Erkenntnis an auf $z = y^{-1}$, so ergibt sich der allgemeine Fall. □

Notation 6.5. Bezeichne $\mathcal{T} \subset \mathcal{W}$ die Menge aller Spiegelungen, und für $t \in \mathcal{T}$ bezeichne $\alpha_t \in V^*$ eine Gleichung seiner Spiegelebene, in Formeln $\ker \alpha_t =$

V^t. Die α_t sind eindeutig bis auf einen Skalar, wir wählen sie für den Rest dieses Abschnitts beliebig aber fest. Für $y \in \mathcal{W}$ betrachten wir nun in R das Element

$$p_y = \prod_{t \in \mathcal{T},\, yt<y} \alpha_t.$$

Satz 6.6. *Sei $y \in \mathcal{W}$ und $B \in \mathcal{B}$. So induzieren die offensichtlichen Morphismen $\Gamma_y B \to \Gamma_{\overline{y}}^{\leq} B$ und $\Gamma_{\overline{y}}^{\geq} B \to \Gamma^y B$ Isomorphismen*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_y B & \xrightarrow{\sim} & \Gamma_{\overline{y}}^{\leq} B p_y, \\ \Gamma_{\overline{y}}^{\geq} B & \xrightarrow{\sim} & \Gamma^y B p_y. \end{array}$$

Bemerkung 6.7. Der Beweis wird erst im Anschluß an 6.10 gegeben. In [Soe92] wird für den Fall $|\mathcal{W}| < \infty$ gezeigt, daß es Elemente $c_y \in R \otimes R$ vom Grad $2l(y)$ gibt, die verschwinden auf $\mathrm{Gr}(x)$ für $x < y$, jedoch nicht auf $\mathrm{Gr}(y)$ selbst. Dann stimmt notwendig c_y auf $\mathrm{Gr}(y)$ bis auf einen Skalar mit $1 \otimes p_y$ überein und wir folgern ein bis auf den fraglichen Skalar kommutatives Diagramm von Isomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{\overline{y}}^{\leq} B & \xrightarrow{c_y} & \Gamma_y B \\ {\cdot p_y} \downarrow & & \| \\ \Gamma_{\overline{y}}^{\leq} B p_y & \leftarrow & \Gamma_y B \end{array}$$

das das Inverse des ersten im Satz behaupteten Isomorphismus etwas expliziter angibt. Ähnlich erhalten wir auch ein bis auf den fraglichen Skalar kommutatives Diagramm mit Isomorphismen im Quadrat ganz rechts

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma_{\neq y} B & \hookrightarrow & B & \twoheadrightarrow & \Gamma^y B & \xrightarrow{\sim} & \Gamma^y B p_y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{\not\leq y} B & \hookrightarrow & \Gamma_{\not< y} B & \twoheadrightarrow & \mathrm{coker} & \cong & \Gamma_{\overline{y}}^{\geq} B \end{array}$$

wo alle Vertikalen bis auf die Vertikale ganz rechts durch Multiplikation mit c_y definiert sind, die obere Horizontale ganz rechts die Multiplikation mit p_y ist, und wir für die letzte untere Horizontale ein Analogon von 6.3 verwenden, um eine kurze exakte Sequenz $\Gamma_{\not\leq y} B \hookrightarrow \Gamma_{\not< y} B \twoheadrightarrow \Gamma_{\overline{y}}^{\geq} B$ herzuleiten. So kann man das Inverse des zweiten im Satz behaupteten Isomorphismus etwas expliziter verstehen.

Bemerkung 6.8. Ich wüßte gerne, ob auch für jedes Element y einer unendlichen Coxetergruppe diejenige Funktion $c_y : \mathrm{Gr}(\leq y) \to \mathbb{C}$ regulär ist, die verschwindet auf $\mathrm{Gr}(x)$ für $x < y$ und die auf $\mathrm{Gr}(y)$ mit $1 \otimes p_y$ übereinstimmt.

Notation 6.9. Für eine Spiegelung $t \in \mathcal{W}$ bezeichne $R_{(t)}$ die Lokalisierung von R an allen homogenen Funktionen auf V, die auf der Spiegelebene V^t nicht identisch verschwinden.

Lemma 6.10. *Für jeden speziellen Bimodul $B \in \mathcal{B}$ ist seine Lokalisierung $B \otimes_R R_{(t)}$ in R-$\mathrm{mod}_{\mathbb{Z}}$-$R_{(t)}$ isomorph zu einem direkten Summanden in einer endlichen direkten Summe von Kopien von $R_{y,yt} \otimes_R R_{(t)}$ und $R_y \otimes_R R_{(t)}$ für $y \in \mathcal{W}$ mit $y < yt$.*

Bemerkung 6.11. Die etwas mühsame Formulierung erlaubt es, eine Diskussion von Krull-Schmid in diesem Zusammenhang zu vermeiden.

Beweis. Wir zeigen das durch Induktion in Anlehnung an die induktive Definition der Objekte von $\mathcal{B}$. Es reicht damit zu zeigen, daß für jede einfache Spiegelung $s \in \mathcal{S}$ die beiden R-$R_{(t)}$-Bimoduln $R \otimes_{R^s} R_y \otimes_R R_{(t)}$ und $R \otimes_{R^s} R_{y,yt} \otimes_R R_{(t)}$ eine Zerlegung in Bimoduln derselben Gestalt haben. Nun können aber $R_y \otimes_R R_{(t)}$ und $R_x \otimes_R R_{(t)}$ nur dann erweitern in R-$\mathrm{mod}_{\mathbb{Z}}$-$R_{(t)}$, wenn gilt $y = xt$. In der Tat gibt es nach 5.8 bereits in R-$\mathrm{mod}_{\mathbb{Z}}$-$R$ nur dann Erweiterungen, wenn gilt $y = xr$ für eine Spiegelung r, und diese Erweiterungen sterben unter der Multiplikation von rechts mit jeder Gleichung der Spiegelebene von r.

Um den ersten Fall zu erledigen müssen wir also nur zeigen, daß aus $sy \neq yt$ folgt $syt > sy$. Das folgt jedoch aus der Deodhar's Eigenschaft Z oder alternativ aus der geometrischen Erkenntnis, daß benachbarte Alkoven eben nur von einer Wand getrennt werden. Im zweiten Fall ist nichts zu tun falls gilt $sy = yt$, in diesem speziellen Fall gilt ja sogar $R \otimes_{R^s} R_{y,yt} \cong R_{y,yt} \oplus R_{y,yt}[-2]$ nach 4.5.

Gilt schließlich $sy \neq yt$, so führt die kurze exakte Sequenz von Bimoduln $R[-2] \hookrightarrow R \otimes_{R^s} R \twoheadrightarrow R_s$ zu einer kurzen exakten Sequenz

$$R_{y,yt}[-2] \hookrightarrow R \otimes_{R^s} R_{y,yt} \twoheadrightarrow R_{sy,syt}$$

und diese Sequenz muß spalten nach Anwenden von $\otimes_R R_{(t)}$, da alle Erweiterungen zwischen den Bimoduln R_y, R_{yt} als Untermoduln und R_{sy}, R_{syt} als Quotienten spalten nach Anwenden von $\otimes_R R_{(t)}$. $\square$

Beweis von 6.6. Der Kokern der Einbettung $\Gamma_y B \hookrightarrow \Gamma_{\leq y} B$ enthält keine Elemente mit Träger $\mathrm{Gr}(y)$. Folglich induziert die Restriktion eine Einbettung

$$\mathrm{Hom}(\Gamma_y^{\leq} B, R_y) = \mathrm{Hom}(\Gamma_{\leq y} B, R_y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma_y B, R_y).$$

Wir zeigen zunächst, daß diese Einbettung sogar im Teilraum $\mathrm{Hom}(\Gamma_y B, R_y p_y)$ landet. Gehen wir nämlich für eine Spiegelung $t \in \mathcal{T}$ mit $yt < y$ durch $\otimes_R R_{(t)}$ zu den Lokalisierungen über und zerlegen B wie im Lemma 6.10, so tragen nur die Summanden der Gestalt $R_{y,yt} \otimes_R R_{(t)}$ zu den beiden zu vergleichenden Hom-Räumen bei und wir folgern, daß unsere Einbettung landet in $\mathrm{Hom}(\Gamma_y B, R_y \alpha_t \otimes_R R_{(t)})$, weil das eben gilt, wenn wir B durch $R_{y,yt}$ ersetzen. Das gilt nun für alle t mit $yt < y$, und da der Schnitt aller dieser $R_y \alpha_t \otimes_R R_{(t)}$ mit R_y gerade $R_y p_y$ ist, ergibt sich die gewünschte Faktorisierung

$$\mathrm{Hom}(\Gamma_y^{\leq} B, R_y) = \mathrm{Hom}(\Gamma_{\leq y} B, R_y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma_y B, R_y p_y).$$

Da $\Gamma_y^{\leq} B$ nach 6.4 ein freier R_y-Modul ist, folgern wir weiter, daß die Einbettung $\Gamma_y B \hookrightarrow \Gamma_y^{\leq} B$ bereits in $\Gamma_y^{\leq} B p_y$ landet. Wir zeigen nun durch Dimensionsvergleich, daß die so erhaltene Einbettung ein Isomorphismus ist. Lemma 6.3 zeigt schon

$$\underline{\mathrm{rk}} \Gamma_y^{\leq} B = \sum (B : \nabla_y[\nu]) v^{\nu + l(y)}.$$

Auf der anderen Seite faktorisiert nach 6.2 die Operation von $R \otimes R$ auf $\Gamma_y B$ über R_y und wir haben folglich $\Gamma_y B = \mathrm{Hom}(R_y, B) = \mathrm{Hom}(\Delta_y[l(y)], B)$. Letzteres ist jedoch nach 5.15 ein freier R-Rechtsmodul vom Rang $\underline{\mathrm{rk}} \Gamma_y B = \sum (B : \nabla_y[\mu]) v^{\mu - l(y)}$. Da aber nun p_y im Grad $2l(y)$ lebt, stimmt das überein mit dem Rang von $\Gamma_y^{\leq} B p_y$ und wir erhalten den ersten Isomorphismus in unserem Satz.

Um den zweiten Isomorphismus herzuleiten beachten wir dual, daß der Kokern der Einbettung $\Gamma_{\geq y} B \hookrightarrow B$ keine Elemente mit Träger $\mathrm{Gr}(y)$ besitzt. Folglich induziert die Restriktion eine Einbettung

$$\mathrm{Hom}(B, R_y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma_{\geq y} B, R_y) = \mathrm{Hom}(\Gamma_y^{\geq} B, R_y).$$

Wir zeigen zunächst wie eben mit Lemma 6.10 über die lokale Struktur der Bimoduln aus $\mathcal{B}$, daß diese Einbettung sogar im Teilraum $\mathrm{Hom}(\Gamma_{\geq y} B, R_y p_y)$ landet. Dann zeigt ein Dimensionsvergleich der homogenen Teile, daß die so definierte Einbettung ein Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(B, R_y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Gamma_y^{\geq} B, R_y p_y)$$

ist. Daraus erhalten wir je nach Geschmack durch Dimensionsvergleich oder Dualisieren mit 6.4 die zweite Behauptung des Satzes. □

Bemerkung 6.12. Wir werden bald zeigen können, daß $\mathcal{B}$ stabil ist unter dem Bilden von direkten Summanden. Solange wir das jedoch noch nicht wissen, definieren wir $\mathrm{add}\,\mathcal{B}$ als die Kategorie aller graduierten R-Bimoduln, die sich als direkte Summanden von speziellen Bimoduln realisieren lassen. Nun verallgemeinern wir 5.15 auf $\mathrm{add}\,\mathcal{B}$ und zeigen

Lemma 6.13. *Für $M \in \mathcal{F}_\Delta$, $N \in \operatorname{add}\mathcal{B}$ und desgleichen für $M \in \operatorname{add}\mathcal{B}$, $N \in \mathcal{F}_\nabla$ ist* $\operatorname{Hom}(M,N)$ *graduiert frei als R-Rechtsmodul vom Rang*

$$\underline{\mathrm{rk}}\operatorname{Hom}(M,N) = \sum_{x,\nu,\mu}(M:\Delta_x[\nu])(N:\nabla_x[\mu])v^{\mu-\nu}.$$

Beweis. Wir beginnen mit dem ersten Fall. Zunächst beachten wir, daß Isomorphismus $\Gamma_y N \xrightarrow{\sim} \Gamma_y^{\leq} N p_y$ aus Satz 6.6 auch für alle $N \in \operatorname{add}\mathcal{B}$ gelten muß. Daraus folgt die Aussage des Lemmas für $M = \Delta_y$ und $N \in \operatorname{add}\mathcal{B}$, denn wir haben

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{rk}}\operatorname{Hom}(\Delta_y,N) &= \underline{\mathrm{rk}}\Gamma_y N[l(y)]\\
&= \textstyle\sum_\mu(\Gamma_y N[l(y)]:\nabla_y[\mu])v^{\mu+l(y)}\\
&= \textstyle\sum_\mu(\Gamma_y^{\leq} N[-l(y)]:\nabla_y[\mu])v^{\mu+l(y)}\\
&= \textstyle\sum_\mu(N:\nabla_y[\mu])v^{\mu}
\end{aligned}$$

Im allgemeinen argumentieren wir dann mit Induktion über die Länge einer Δ-Fahne von M. Sei in der Tat $x \in \mathcal{W}$ ein Element maximaler Länge mit $(M:\Delta_x[\nu]) \neq 0$ für ein $\nu \in \mathbb{Z}$. Wegen der Maximalität von x haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$\Gamma_x M \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \mathrm{coker}$$

mit $\Gamma_x M$ und coker in $\mathcal{F}_\Delta$ und

$$(M:\Delta_y[\nu]) = (\Gamma_x M:\Delta_y[\nu]) + (\mathrm{coker}:\Delta_y[\nu])$$

für alle $y \in \mathcal{W}$ und $\nu \in \mathbb{Z}$. Natürlich ist hier sogar auf der rechten Seite der erste Summand Null im Fall $y \neq x$ und der zweite im Fall $y = x$. In jedem Fall aber erzwingen unsere Dimensionsformeln 5.15 für alle $N \in \mathcal{B}$ eine kurze exakte Sequenz

$$\operatorname{Hom}(\mathrm{coker},N) \hookrightarrow \operatorname{Hom}(M,N) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}(\Gamma_x M,N).$$

Diese Sequenz muß dann auch für alle $N \in \operatorname{add}\mathcal{B}$ exakt sein, und so zeigt unsere Induktion über die Länge einer Δ-Fahne von M umgekehrt die behaupteten Dimensionsformeln für alle $N \in \operatorname{add}\mathcal{B}$.

Den zweiten Fall behandeln wir analog. Daß 6.6 auch für alle $B \in \operatorname{add}\mathcal{B}$ gelten muß erledigt die Fälle $N = \nabla_y$. Im allgemeinen argumentieren wir über die Länge einer ∇-Fahne von N, nehmen ein Element x maximaler Länge mit $(N:\nabla_x[\nu]) \neq 0$ für mindestens ein $\nu \in \mathbb{Z}$, haben wegen der Maximalität von x eine kurze exakte Sequenz

$$\ker \hookrightarrow N \twoheadrightarrow \Gamma^x N$$

mit $\Gamma^x N$ und ker in $\mathcal{F}_\nabla$ und

$$(N : \nabla_y[\nu]) = (\ker : \nabla_y[\nu]) + (\Gamma^x N : \nabla_y[\nu])$$

für alle $y \in \mathcal{W}$ und $\nu \in \mathbb{Z}$, und wieder erzwingen unsere Dimensionsformeln 6.13 für alle $M \in \mathcal{B}$ eine kurze exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}(M, \ker) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(M, N) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(M, \Gamma^x N),$$

die dann auch für alle $M \in \mathrm{add}\,\mathcal{B}$ exakt sein muß und den gewünschten Induktionsbeweis erlaubt. $\square$

Satz 6.14. *1. Für alle $x \in \mathcal{W}$ gibt es bis auf Isomorphismus genau einen unzerlegbaren speziellen Bimodul $B_x \in \mathcal{B}$ mit Träger in $\mathrm{Gr}(\leq x)$ und $(B_x : \Delta_x[\nu]) = 1$ für $\nu = 0$ und Null für $\nu \neq 0$.*

2. Die Abbildung $(x, \nu) \mapsto B_x[\nu]$ definiert eine Bijektion

$$\mathcal{W} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Unzerlegbare Objekte in } \mathcal{B}, \\ \textit{bis auf Isomorphismus} \end{array} \right\}$$

3. Die Bimoduln B_x sind selbstdual, in Formeln $DB_x \cong B_x$.

4. Die Kategorie $\mathcal{B}$ ist stabil unter dem Bilden von direkten Summanden, in Formeln $\mathcal{B} = \mathrm{add}\,\mathcal{B}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die drei ersten Punkte für $\mathrm{add}\,\mathcal{B}$ statt $\mathcal{B}$. Sei $x = st \dots r$ eine reduzierte Darstellung. In $R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^t} \dots R \otimes_{R^r} R[l(x)]$, das ja nach 5.7 bis auf die Unzerlegbarkeit bereits alle von B_x geforderten Eigenschaften hat, betrachten wir den unzerlegbaren Summanden B_x mit $(B_x : \Delta_x) = 1$ und haben damit schon ein mögliches $B_x \in \mathrm{add}\,\mathcal{B}$ gefunden, das sogar offensichtlich auch noch selbstdual ist als der einzige Summand eines selbstdualen Bimoduls, dessen Träger $\mathrm{Gr}(x)$ umfaßt.

Es gilt nun nur noch zu zeigen, daß es außer den eben konstruierten B_x und ihren Verschobenen $B_x[\nu]$ keine unzerlegbaren Objekte in $\mathrm{add}\,\mathcal{B}$ gibt. Aber sei $M \in \mathrm{add}\,\mathcal{B}$ und sei $x \in \mathcal{W}$ ein Element maximaler Länge mit $(M : \Delta_x[\nu]) \neq 0$ für ein $\nu \in \mathbb{Z}$. Wir zeigen, daß $B_x[\nu]$ ein direkter Summand ist von M. Wegen der Maximalität von x liefern zunächst nach 6.13 oder genauer seinem Beweis die offensichtlichen Abbildungen Surjektionen

$$\mathrm{Hom}(M, B_x) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma_x M, B_x) = \mathrm{Hom}(\Gamma_x M, \Gamma_x B_x)$$
$$\mathrm{Hom}(B_x, M) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}(B_x, \Gamma^x M) = \mathrm{Hom}(\Gamma^x B_x, \Gamma^x M)$$

Schließlich beachten wir noch, daß aufgrund der Maximalität von x mit 6.3 sogar gilt $\Gamma_x^{\leq} M \xrightarrow{\sim} \Gamma^x M$, so daß also aufgrund von 6.6 die Einbettung $\Gamma_x M \hookrightarrow \Gamma^x M$ Isomorphismen

$$i : \Gamma_x M \xrightarrow{\sim} \Gamma^x M p_x \quad \text{und} \quad i : \Gamma_x B_x \xrightarrow{\sim} \Gamma^x B_x p_x$$

induziert. Gegeben $m \in \Gamma^x M$ homogen finden wir nun $f \in \mathrm{Hom}(\Gamma^x B_x, \Gamma^x M)$ homogen mit $f(b) = m$ für $b \in \Gamma^x B_x$ einen homogenen Erzeuger. Wählen wir m sogar so, daß es sich zu einer homogenen Basis des graduiert freien R-Moduls $\Gamma^x M$ ergänzen läßt, so finden wir auch $g \in \mathrm{Hom}(\Gamma_x M, \Gamma_x B_x)$ mit $g(i^{-1}(mp_x)) = i^{-1}(bp_x)$. Für homogene Lifts $\tilde{f} : B_x \to M$ und $\tilde{g} : M \to B_x$ von f und g folgt, daß $\tilde{g} \circ \tilde{f} : B_x \to B_x$ auf $\Gamma^x B_x$ die Identität induziert. Also kann $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ nicht nilpotent sein, also ist es ein Isomorphismus, da ja B_x unzerlegbar ist. Schließlich folgt durch Induktion über die Länge von x, daß alle B_x schon zu $\mathcal{B}$ gehören: In der Tat zerfällt unser langes Tensorprodukt oben, das per definitionem zu $\mathcal{B}$ gehört, in einen Summanden B_x nebst anderen Summanden, die wegen ihres Trägers die Gestalt $B_y[\nu]$ mit $l(y) < l(x)$ haben müssen. Das zeigt die letzte Behauptung. □

Bemerkung 6.15. Wenn wir ein $B \in \mathcal{B}$ finden mit $\langle B \rangle = \mathcal{E}(C'_x)$, so folgt schon $B \cong B_x$ und damit $\langle B_x \rangle = \mathcal{E}(C'_x)$. In der Tat ist ein solches B notwendig unzerlegbar, denn berechnen wir die Dimensionen der homogenen Komponenten seines Endomorphismenrings, so finden wir nichts in negativen Graden und nur den Grundkörper im Grad Null.

Bemerkung 6.16. Für alle $x \in \mathcal{W}$ ist $h_\Delta(B_x) = h_\nabla(B_x)$ jedenfalls ein selbstduales Element von $\mathcal{H}$ der Gestalt $C'_x + \sum_{y<x} h_y C'_y$ für geeignete selbstduale $h_y \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$. Sei in der Tat $x = st \dots r$ eine reduzierte Zerlegung. So ist

$$R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^t} \dots R \otimes_{R^r} R[l(x)]$$

selbstdual und zerfällt folglich in B_x plus Summanden der Gestalt B_y und $B_y[\nu] \oplus B_y[-\nu]$ für $y < x$. Wir folgern $h_\Delta(B_x) = h_\nabla(B_x)$ selbstdual mit Induktion über die Bruhat-Ordnung, und dann gilt offensichtlich

$$h_\Delta(B_x) = h_\nabla(B_x) = C'_x + \sum_{y<x} h_y C'_y$$

für geeignete selbstduale $h_y \in \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$. Ich kann allerdings noch nicht einmal zeigen, daß diese h_y nichtnegative Koeffizienten haben.

7 Diskussion der Hauptvermutung

Ein natürlicher Ansatz zum Beweis der Vermutung 1.12 scheint mir vollständige Induktion über die Länge von x. Ich formuliere im folgenden verschiedene Varianten dieses Ansatzes in einem Omnibus-Lemma. Bezeichne $\underline{\mathrm{Hom}}(B, B')$ die $(R \otimes R)$-Homomorphismen vom $\mathbb{Z}$-Grad Null zwischen zwei $\mathbb{Z}$-graduierten R-Bimoduln B, B'.

Lemma 7.1. *Seien $x \in \mathcal{W}$ und $s \in \mathcal{S}$ gegeben mit $sx > x$. Wir nehmen an, es gelte $\langle B_y \rangle = \mathcal{E}(C'_y)$ für alle $y \in \mathcal{W}$ mit $l(y) \leq l(x)$. Unter dieser Annahme sind gleichbedeutend:*

1. *Es gilt $\langle B_{sx} \rangle = \mathcal{E}(C'_{sx})$;*

2. *Für alle y mit $l(y) \leq l(x)$ definiert die Komposition von Morphismen $\underline{\mathrm{Hom}}(B_y, \theta_s B_x) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\theta_s B_x, B_y) \to \underline{\mathrm{End}} B_y = k$ eine nicht ausgeartete Paarung von k-Vektorräumen.*

3. *Für alle y mit $l(y) \leq l(x)$ definiert $\Gamma_y \theta_s B_x \hookrightarrow \Gamma^y \theta_s B_x$ eine Inklusion $(\Gamma_y \theta_s B_x)_{l(y)} \hookrightarrow \Gamma^y \theta_s B_x p_y \otimes_R k$.*

4. *Für alle y mit $l(y) \leq l(x)$ definiert die offensichtliche Abbildung eine Inklusion $(\Gamma_y \theta_s B_x)_{l(y)} \hookrightarrow \Gamma_{\overline{y}}^{\geq} \theta_s B_x \otimes_R k$.*

5. *Für alle y mit $l(y) \leq l(x)$ definiert die offensichtliche Abbildung eine Inklusion $(\Gamma_{\overline{y}}^{\leq} \theta_s B_x)_{-l(y)} \hookrightarrow \Gamma^y \theta_s B_x \otimes_R k$.*

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: Dem Leser überlassen. $2 \Rightarrow 1$: In der Notation von [Soe97] können wir schreiben

$$C'_s C'_x = C'_{sx} + \sum_{y < sx} m_y C'_y$$

mit gewissen $m_y \in \mathbb{Z}$ und es gilt $\mathcal{E}(C'_s C'_x) = \langle \theta_s B_x \rangle$. Nach 5.15 und Induktionsannahme haben wir also

$$\dim \underline{\mathrm{Hom}}(B_y, \theta_s B_x) = m_y = \dim \underline{\mathrm{Hom}}(\theta_s B_x, B_y).$$

Ist unsere Paarung nicht ausgeartet, so können wir für jedes y jeweils m_y Kopien von B_y von $\theta_s B_x$ abspalten und so ein $B \in \mathcal{B}$ konstruieren mit $\langle B \rangle = \mathcal{E}(C'_{sx})$. Nach Bemerkung 6.15 gilt dann aber notwendig $B \cong B_{sx}$.

$3 \Leftrightarrow 2$: Mit Dimensionsvergleich erkennen wir, daß auf den Homomorphismen vom Grad Null die offensichtlichen Abbildungen Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathrm{Hom}}(B_y, \theta_s B_x) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta_y, \theta_s B_x) \\ \underline{\mathrm{Hom}}(\theta_s B_x, B_y) & \xrightarrow{\sim} & \underline{\mathrm{Hom}}(\theta_s B_x, \nabla_y) \end{array}$$

liefern. Nach 6.6 wissen wir, daß die Komposition der Morphismen vom Grad Null $\Delta_y \to B_y \to \nabla_y$ bis auf einen Skalar die Rechtsmultiplikation mit p_y ist, und daß ganz allgemein für alle $B \in \mathcal{B}$ jede Komposition $\Delta_y \to B \to \nabla_y$ in $\nabla_y p_y$ landet. Damit können wir unsere Paarung aus Teil 2 umschreiben zu einer Paarung

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta_y, \theta_s B_x) \times \underline{\mathrm{Hom}}(\theta_s B_x, \nabla_y) \to p_y k \subset \underline{\mathrm{Hom}}(\Delta_y, \nabla_y).$$

Nun ist aber so eine Paarung zwischen zwei Räumen nichts anderes als eine Abbildung vom einen in den Dualraum des anderen, wir identifizieren mühelos

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Hom}}(\Delta_y, \theta_s B_x) &= (\Gamma_y \theta_s B_x)_{l(y)} \\
\underline{\mathrm{Hom}}(\theta_s B_x, \nabla_y) &= \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma^y \theta_s B_x, \nabla_y) \\
&= \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma^y \theta_s B_x, k[l(y)]) \\
&= \underline{\mathrm{Hom}}((\Gamma^y \theta_s B_x) \otimes_R k, k[l(y)]) \\
\underline{\mathrm{Hom}}(\theta_s B_x, \nabla_y)^* &= ((\Gamma^y \theta_s B_x) \otimes_R k)_{l(y)}
\end{aligned}$$

und erkennen so $3 \Leftrightarrow 2$. Die Varianten 4 und 5 sind Umformulierungen von 3 unter Zuhilfenahme von 6.6. □

Bemerkung 7.2. Es scheint mir nun naheliegend, die Einbettungen

$$\Gamma_y B_x \hookrightarrow \Gamma^y B_x$$

näher zu untersuchen. Definieren wir eine Surjektion $R \twoheadrightarrow k[T]$ als die Restriktion auf die Gerade $k\rho$, so vermute ich, daß der Kokern von $(\Gamma_y B_x) \otimes_R k[T] \hookrightarrow (\Gamma^y B_x) \otimes_R k[T]$ eine direkte Summe sein sollte von Kopien von $(k[T]/(T^{i+1}))[i]$, wo wir wieder $\deg T = 2$ genommen haben. Das sollte sogar allgemeiner gelten für alle Geraden, die nicht ganz in einer Spiegelebene enthalten sind.

Literatur

[BM01] Tom Braden and Robert MacPherson, *From moment graphs to intersection cohomology*, Math. Ann. **321** (2001), no. 3, 533–551.

[Bou70] Nicolas Bourbaki, *Algèbre I*, Hermann, 1970.

[Bou81] ———, *Groupes et algèbres de Lie*, vol. 4-6, Masson, 1981.

[Dye88] Matthew Dyer, *On some generalisations of the Kazhdan-Lusztig polynomials for "universal" Coxeter systems*, Journal of Algebra **116** (1988), 353–371.

[Dye94] ———, *Representation theories from Coxeter groups*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), CMS Conf. Proc., 16, AMS, 1994, pp. 105–124.

[Här99] Martin Härterich, *Kazhdan-Lusztig-Basen, unzerlegbare Bimoduln, und die Topologie der Fahnenmannigfaltigkeit einer Kac-Moody-Gruppe*, Dissertation in Freiburg, http://www.freidok.uni-freiburg.de/cgi-bin/w3-msql/freidok/ergebnis.html, 1999.

[Her99] Immanuel Herrmann, *Untersuchungen zu den Kazhdan-Lusztig-Polynomen und zu dazupassenden Bimoduln*, Diplomarbeit in Freiburg, 1999.

[Hum90] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, 1990.

[Kac90] Victor G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3 ed., Cambridge University Press, 1990.

[KL79] David Kazhdan and George Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Inventiones **53** (1979), 191–213.

[Lus85] George Lusztig, *Cells in affine Weyl groups*, Algebraic groups and related topics: Adv. Stud. Pure Math. 6, North-Holland, 1985, pp. 255–287.

[Soe92] Wolfgang Soergel, *The combinatorics of Harish-Chandra bimodules*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **429** (1992), 49–74.

[Soe97] ———, *Kazhdan-Lusztig-Polynome und eine Kombinatorik für Kipp-Moduln*, Representation Theory (An electronic Journal of the AMS) **1** (1997), 37–68, english 83–114.

[Soe00] ———, *On the relation between intersection cohomology and representation theory in positive characteristic*, J. of pure and applied Algebra **152** (2000), 311–335.