Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen.

Von

Friedrich Riesz in Budapest.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Im Mittelpunkte der vorliegenden Untersuchungen steht die Frage nach der Auflösbarkeit eines Systems von Funktionalgleichungen der Form

$$\int_a^b f(x)\,\xi(x)\,dx = c$$

nach der unbekannten Funktion $\xi(x)$. Es haben schon manche, unter andern besonders Stieltjes, derartige Systeme untersucht. Jedoch die

Möglichkeit, in sehr allgemeinen Fällen entscheidende Kriterien zu entwickeln, ist erst seit kurzem gegeben, seitdem nämlich der Begriff des Integrals durch Lebesgue jene geistreiche und glückliche Erweiterung erfahren hat, welcher nun manche, bisher gescheiterte Probleme ihre sinngemäße Erledigung verdanken.

Vor einigen Jahren haben E. Fischer und Verfasser gleichzeitig die Frage nach der Auflösbarkeit des Systems für den Fall beantwortet, daß die für irgend eine Strecke (a, b) erklärten, reellen, integrierbaren Funktionen $f(x)$ ein *normiertes Orthogonalsystem* bilden, d. i. ihre Produktintegrale $= 0$ und ihre Quadratintegrale $= 1$ sind, und auch von der lösenden Funktion quadratische Integrierbarkeit gefordert wird.*) *Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Systems*

$$\int_a^b f_k(x)\,\xi(x)\,dx = c_k{}^{**)} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

ergab sich die Existenz der Summe

$$\sum_k c_k^2.$$

Unter dieser Bedingung erscheint eine Lösung gewissermaßen als Summe der formal gebildeten, nicht notwendig konvergenten Reihe

$$\sum_k c_k f_k(x),$$

d. i. eine Funktion, die aus dieser Reihe mittels gewisser Summationsverfahren abgeleitet werden kann.***) Die so definierte, bis auf eine

---

*) E. Fischer, „Sur la convergence en moyenne“, Paris Comptes Rendus 13 mai 1907.

F. Riesz, „Sur les systèmes orthogonaux de fonctions“, C. R. 18 mars 1907. „Über orthogonale Funktionensysteme“, Göttingen, Nachrichten 1907, S. 116—122.

**) Die Verwendung der Indizes ist gerechtfertigt, da nach einem Satze von E. Schmidt („Sur la puissance des systèmes orthogonaux de fonctions continues“, Paris, Comptes Rendus, 10 décembre 1906) *jedes Orthogonalsystem endlich oder abzählbar ist.* Die Beweise, welche Schmidt (l. c.) und Verfasser („Sur les ensembles de fonctions sommables“, C. R. 12 novembre 1906) für diesen Satz mitgeteilt haben, sind zwar beide für engere Funktionenklassen als jene der quadratisch integrierbaren Funktionen verfaßt, gelten aber ohne weiteres auch für diese Funktionenklasse.

***) Fischer verwendet das folgende Verfahren: gliedweise Integration, Summenbildung, Differenzieren; auch Verfasser bedient sich desselben Verfahrens im Falle des trigonometrischen Orthogonalsystems. Man kommt aber auch mit einer leichten Verallgemeinerung der Konvergenz im gewöhnlichen Sinne, der „*Konvergenz dem Maße nach*“ aus. Vgl. F. Riesz, „Sur les suites de fonctions mesurables“, Paris Comptes Rendus, 17 mai 1909; H. Weyl, „Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten“, Mathematische Annalen Bd. 67, S. 243.

beliebige additive Funktion vom Integral 0 wohlbestimmte lösende Funktion $\xi^*(x)$ ist unter allen möglichen Lösungen des Systems als jene *vom kleinsten Quadratintegral* ausgezeichnet. Dieselbe hat auch die ebenfalls auszeichnende Eigenschaft, daß *der Wert des Integrals*

$$\int_a^b \Big[\xi^*(x) - \sum_{k=1}^n c_k f_k(x)\Big]^2 dx$$

mit unbegrenzt wachsendem n *dem Grenzwerte* 0 *zustrebt.* Durch leichte Umformung ergibt sich hieraus auch die Identität

$$\int_a^b [\xi^*(x)]^2 dx = \sum_k c_k^2,$$

welche kurz vorher im Falle des trigonometrischen Orthogonalsystems schon durch Fatou allgemein begründet wurde.*)

Es ist nun wohlbekannt, wie man mit den angeführten Resultaten — ja auch schon mit der engeren Formulierung derselben z. B. für das trigonometrische Orthogonalsystem — an die von Hilbert begründete, von Hellinger, Toeplitz, E. Schmidt, Hilb, Weyl u. a. weiterentwickelte schöne Theorie der Funktionen abzählbar unendlich vieler Veränderlichen anknüpfen kann.**) Man gelangt zu einer Fülle von Tatsachen über quadratisch integrierbare Funktionen.***) Es bedarf hierzu fast rein formaler Übersetzungsarbeit. *Unter andern ist damit auch das anfangs gestellte Problem für die genannte Funktionenklasse vollständig erledigt, nachdem die Kriterien für die Auflösbarkeit des entsprechenden Gleichungssystems mit abzählbar unendlich vielen Unbekannten bei Schmidt fertig vorliegen.*†)

---

*) P. Fatou, „Séries trigonométriques et séries de Taylor", Acta Mathematica Bd. 30, S. 379. Bezüglich der früheren — weniger allgemeinen — Beweise dieses „*Fundamentalsatzes der Fourierschen Konstanten*" vgl. A. Hurwitz, „Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen". Mathematische Annalen Bd. 57, S. 425—446; Bd. 59, S. 553.

**) Vgl. z. B. F. Riesz, „Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm", Paris, Comptes Rendus, 8 avril 1907; „Sur une espèce de Géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables", C. R. 24 juin 1907. M. Fréchet, „Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires", C. R. 24 juin 1907; „Essai de géométrie analytique à une infinité de coordonnées", Nouvelles Annales de Mathématiques, 1908, S. 91—116, 289—317. M. Plancherel, „Notes sur les équations intégrales singulières", Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali, 1909, S. 37—53; „Über singuläre Integralgleichungen", Mathematische Annalen Bd. 67, S. 515—518.

***) Auch *komplexe* Funktionen der reellen Veränderlichen werden zugelassen; dann aber muß $(f(x))^2$ durch $|f(x)|^2$ ersetzt werden.

†) E. Schmidt, „Über die Auflösung linearer Gleichungen mit abzählbar unendlich vielen Unbekannten", Palermo, Rendiconti, t. XXV (1908), S. 53—77.

In der vorliegenden Arbeit wird die Voraussetzung der quadratischen Integrierbarkeit durch jene der *Integrierbarkeit von* $|f(x)|^p$ ersetzt; p bedeutet eine beliebige, rationale oder irrationale Zahl > 1.*) Jede Zahl p bestimmt eine Funktionenklasse $[L^p]$. Die Rolle der Klasse $[L^2]$ übernehmen hier je zwei Klassen $[L^p]$ und $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$; sie haben die Eigenschaft, daß *jede Funktion, die mit allen Funktionen der einen Klasse integrierbare Produkte ergibt, sicher der andern Klasse angehört.* Die Untersuchung dieser Funktionenklassen wird auf die wirklichen und scheinbaren Vorteile des Exponenten $p = 2$ ein ganz besonderes Licht werfen; und man kann auch behaupten, daß sie für eine axiomatische Untersuchung der Funktionenräume brauchbares Material liefert.

Was nun insbesondere die anfangs gestellte Frage angeht, so wird dieselbe in der Folge *unter der Voraussetzung, daß die Koeffizientenfunktionen der einen, die gesuchte Funktion der andern je zweier zugeordneter Klassen angehören, vollständig erledigt.* Für eine endliche Anzahl von Gleichungen gelingt dies durch die Betrachtung eines einfachen Variationsproblems; und der Übergang zu unendlich vielen Gleichungen wird sich nachher mit Hilfe des Begriffs der *schwachen* Konvergenz äußerst leicht gestalten. Das einfache Kriterium, das wir erhalten, ist auch für den Fall $p = 2$ bisher unbekannt. Es ergeben sich daraus entsprechende Kriterien für die *Umkehrbarkeit gewisser Funktionaltransformationen.* Die Anwendbarkeit dieser Kriterien wird an einzelnen speziellen Typen von Funktionalgleichungen ausgeprobt, wobei sich auch für diese Typen manche neue Gesichtspunkte ergeben.

Man kann auch durch Anwendung ganz ähnlicher Methoden die Analysis abzählbar unendlich vieler Veränderlichen unter der Voraussetzung, daß die Summe der p^{ten} Potenzen der absoluten Beträge konvergiert, weiter ausbauen.**) Doch ist hier ein wesentlicher Unterschied zu verzeichnen. Denn die Resultate, zu welchen man gelangen wird, zeigen auch hier völlige Analogie mit jenen, zu welchen die Untersuchung der Funktionenklassen $[L^p]$ führt. *Jedoch die Übersetzbarkeit der Resultate,*

---

*) Ich hatte mich schon in der Note: „Sur les suites de fonctions mesurables", l. cit. mit derartigen Funktionen beschäftigt. Es wird dort jedoch nur $p > 0$ vorausgesetzt, was für die Gültigkeit der entwickelten Sätze schon hinreicht.

**) E. Landau, „Über einen Konvergenzsatz", Göttingen, Nachrichten, 1907, S. 25—27, hat einen Satz von Hellinger und Toeplitz, nach welchem aus der Konvergenz einer linearen Form für alle Variabelnreihen konvergenter Quadratsumme die Beschränktheit der Form folgt, auf den Fall eines beliebigen Exponenten $p > 1$ ausgedehnt. Andere Resultate in dieser Richtung, als die bei Landau angeführten, scheinen nicht vorzuliegen.

wie für $p = 2$, und damit die Möglichkeit einer ähnlich einfachen analytischen Theorie geht in allen übrigen Fällen verloren; und somit tritt die synthetische Behandlungsweise in ihre vollen Rechte.

§ 1.

Das Lebesguesche Integral.*)

Wir verwenden den Begriff des bestimmten Integrals in dem von Lebesgue eingeführten Sinne.

Die Grundlage für die Lebesguesche Begriffsbildung bildet der schon früher von Borel entwickelte, von Lebesgue vertiefte Begriff des *Inhaltsmaßes der Punktmengen.* Wir setzen denselben als bekannt voraus. In den folgenden Untersuchungen kommt den Mengen vom Maße 0, die wir kurz *Nullmengen* nennen, eine besondere Stellung zu. Die Nullmengen haben die Eigenschaft, daß alle ihre Teilmengen meßbar und ebenfalls Nullmengen sind.

Die folgende genetische Definition des Integrals gestattet es, gewisse Reihensätze unmittelbar auf Integrale zu übertragen.

Man definiert den Begriff zunächst nur für Funktionen, deren Wertevorrat aus einer endlichen Anzahl oder höchstens aus abzählbar unendlich vielen verschiedenen Werten besteht. Eine solche, für die meßbare Menge $\mathfrak{M}$ definierte Funktion nehme diese Werte $a_1, a_2, \cdots$ je auf einer meßbaren Menge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots$ vom Maße $m_1, m_2, \cdots$ an. Das Integral der Funktion erstreckt über die Menge $\mathfrak{M}$, wird durch die Summe $a_1 m_1 + a_2 m_2 + \cdots$ definiert, vorausgesetzt, daß die Reihe entweder nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht oder aber absolut konvergiert. In diesem Falle heißt dann die Funktion integrierbar.

Von dieser speziellen Klasse integrierbarer Funktionen aus gelangt man zu der allgemeinen Klasse, wenn man ihr alle ihre Verdichtungsfunktionen im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz adjungiert. Eine für die meßbare Menge $\mathfrak{M}$ definierte Funktion heißt hiernach integrierbar, wenn man sie durch Funktionen jener speziellen Klasse gleichmäßig annähern kann, und das Integral der Funktion, erstreckt über die Menge $\mathfrak{M}$, ergibt sich als Grenzwert der entsprechenden Integrale.

*) H. Lebesgue, „Intégrale, Longeur, Aire", Thèse, Paris 1902; „Leçons sur l'intégration", Paris 1904; etc. Untersuchungen über die Grundlagen der Theorie enthält auch eine neue, umfassende Abhandlung von Lebesgue [„Sur les intégrales singulières", Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3e série, t. I, S. 25—117], welche nach Abschluß der vorliegenden Arbeit erschienen ist. Dieselbe weist auch mit den Paragraphen 2, 3 unserer Arbeit manche Berührungspunkte auf, die jedoch nur den Fall $p = 2$ betreffen.

Auf Grund dieser Definition sind unter anderen alle im wesentlichen beschränkten, meßbaren Funktionen integrierbar. Im wesentlichen beschränkt heißt eine Funktion, sobald es zwei Werte G und g gibt, sodaß jene Punkte, für welche die Funktionswerte nicht zwischen G und g liegen, wenn es deren überhaupt welche gibt, eine Nullmenge ausmachen. Meßbar heißt die Funktion, wenn für jede Zahl a die Menge der Punkte, in denen die Funktionswerte $\geqq a$ ausfallen, — wenn es deren welche gibt — eine meßbare Menge bilden.

Die Integrierbarkeit der im wesentlichen beschränkten, meßbaren Funktionen ist übrigens ein Spezialfall des folgenden allgemeinen Satzes: *Ist $f(x)$ in der meßbaren Menge $\mathfrak{M}$ integrierbar, so ist auch jede meßbare Funktion $g(x)$, für welche auf jener Menge im wesentlichen — d. i. höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge —*

$$|g(x)| \leqq |f(x)|$$

ausfällt, auf der Menge $\mathfrak{M}$ ebenfalls integrierbar.

Ist eine Funktion auf der meßbaren Menge M integrierbar, so ist sie es auch auf jeder meßbaren Teilmenge derselben. Ist die Teilmenge $\mathfrak{M}_0$ eine Nullmenge, so ist das Integral der Funktion, erstreckt über $\mathfrak{M}_0$, gleich 0, und es genügt, bei Integration über $\mathfrak{M}$, die Integration nur über $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_0$ zu erstrecken. Eine beliebige Abänderung der Funktionswerte für die Menge $\mathfrak{M}_0$ ist für die Integrierbarkeit und den Wert des Integrals belanglos. Daraus folgt, daß man, ohne die Gültigkeit der Resultate zu gefährden, übereinkommen darf, daß man auch jene Funktionen, bei denen einzelnen Punkten, die aber eine Nullmenge bilden, die Werte $+\infty$ oder $-\infty$ zugeordnet sind, als integrierbar betrachtet, wenn nur für die Restmenge Integrierbarkeit herrscht. Man darf auch den Begriff der integrierbaren Funktion derart erweitern, daß man eine Nullmenge von Stellen zuläßt, für welche die Funktion nicht eindeutig oder auch überhaupt nicht definiert ist.

Eine besondere Rolle kommt jenen Funktionen zu, die — höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge — überall den Wert 0 besitzen. Wir nennen sie *Nullfunktionen.* Die Addition einer beliebigen Nullfunktion ist für die Integrierbarkeit und den Wert des Integrals nicht von Belang; und *wir dürfen in den folgenden Entwicklungen zwei Funktionen, die höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge übereinstimmen, d. i. deren Differenz eine Nullfunktion ist, als identisch betrachten.*

Die Ausdehnung der angeführten Resultate auf komplexe Funktionen reeller Veränderlichen, wie wir sie in der vorliegenden Arbeit betrachten, ist trivial einfach.

§ 2.

Ungleichungen und Konvergenzsätze.

Man entwickelt leicht, z. B. mit Hilfe der klassischen Methode der Differentialrechnung zur Bestimmung des relativen Extremums, die Ungleichungen

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| \leqq \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}; \qquad (p>1)$$

$$(2)\qquad \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}.^{*)} \qquad (p>1)$$

Aus Ungleichung (1) *folgt für jedes* $p>1$ *unter Voraussetzung der Konvergenz der Reihen*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^{\frac{p}{p-1}}$$

die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_i b_i$$

und die Ungleichung

$$(3)\qquad \left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right| \leqq \left[\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Aus Ungleichung (2) *folgt für jedes* $p>1$ *unter Voraussetzung der Konvergenz der Reihen*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p, \qquad \sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p$$

---

*) Es genügt, den Beweis für $n=2$ zu führen, sodann schließt man ohne weiteres von n auf $n+1$. Ferner kann man annehmen, daß die Größen a_1, a_2, b_1, b_2 wesentlich positiv sind; werden nämlich die Ungleichungen unter dieser Annahme entwickelt, so folgt ihre Gültigkeit für den Fall, daß eine oder mehrere jener Größen $=0$ sind, durch leichten Grenzübergang, während für negative oder komplexe Werte die Ungleichungen a fortiori gelten. Nun kommt man bei jener also nur scheinbar einschränkenden Annahme mit den üblichen Mitteln der Differentialrechnung aus; um die Ungleichungen zu erhalten, genügt es z. B. in jedem der beiden Fälle, bei festen a_1, a_2, b_1 und variierendem b_2 das Minimum der Differenz der rechten und linken Seite zu bestimmen; in beiden Fällen erhält man den Minimalwert 0.

Meines Wissens wurde die Ungleichung (2), die sich für $p=2$ mit (1) im wesentlichen deckt, von H. Minkowski aufgestellt: „Diophantische Approximationen", Leipzig 1907, S. 95. Bez. der Literatur der Cauchy-Hölderschen Ungleichung (1) siehe E. Landau, „Über einen Konvergenzsatz", l. cit.

die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p$$

und die Ungleichung

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \left[\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Die Definition der bestimmten Integrale, wie sie im § 1 wiedergegeben ist, gestattet es, aus den Ungleichungen (3), (4) unmittelbar auf die Ungleichungen

$$(5) \qquad \left|\int_{\mathfrak{M}} f(x)\, h(x)\, dx\right| \leqq \left[\int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathfrak{M}} |h(x)|^{\frac{p}{p-1}}\, dx\right]^{\frac{p-1}{p}}, \qquad (p>1)$$

$$(6) \qquad \left[\int_{\mathfrak{M}} |f(x) + g(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \left[\int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\mathfrak{M}} |g(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \quad (p>1)$$

zu schließen; dabei *folgt die Existenz der linksstehenden Integrale aus jener der rechtstehenden.**)

Ersetzt man ferner in (6) $f(x)$ durch $f(x) - g(x)$, so folgt nach einfacher Umordnung

$$(7) \qquad \left[\int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} - \left[\int_{\mathfrak{M}} |g(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \left[\int_{\mathfrak{M}} |f(x) - g(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \quad (p>1)$$

Aus (6) folgert man noch leicht die allgemeinere Ungleichung

$$(8) \qquad \left[\int_{\mathfrak{M}} \left|\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \sum_{i=1}^{n} |c_i| \left[\int_{\mathfrak{M}} |f_i(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (p>1)$$

u. zw. besteht diese Ungleichung wieder unter Voraussetzung der Existenz der rechtsstehenden Integrale, aus welcher dann *jene der linksstehenden folgt.*

Einen wichtigen Spezialfall von (5) erhält man, wenn man

$$h(x) = \overline{\text{sign}}\, f(x)^{**})$$

setzt. Man erhält, wenn m das Maß von $\mathfrak{M}$ bedeutet

$$(9) \qquad \int_{\mathfrak{M}} |f(x)|\, dx \leqq m^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_{\mathfrak{M}} |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \qquad (p>1).$$

---

*) Für den Fall $p = 2$ ist Ungleichung (5) unter dem Namen Schwarzsche Ungleichung bekannt. Für diesen Fall folgt (6) aus (5) durch einfache Umformung. S. E. Fischer, „Sur la convergence en moyenne", l. cit.

**) Wir setzen hier wie auch weiterhin $\text{sign}\, z = \overline{\text{sign}}\, z = 0$, wenn $z = 0$, $\text{sign}\, z = e^{i\varphi}$, $\overline{\text{sign}}\, z = e^{-i\varphi}$, wenn $z = \varrho e^{i\varphi}$, $\varrho = |z|$ ist.

Ersetzt man in dieser Ungleichung $|f(x)|$ durch $|f(x)|^q$ und p durch $p-q$, so erhält man die Ungleichung

$$\text{(10)} \qquad \int\limits_{\mathfrak{M}} |f(x)|^q\, dx \leqq m^{\frac{p-q-1}{p-q}} \Big[\int\limits_{\mathfrak{M}} |f(x)|^p\, dx \Big]^{\frac{1}{p-q}};$$

dieselbe gilt für alle $p > q > 0$ unter Voraussetzung der Existenz des rechtsstehenden Integrals, woraus auch *jene der linksstehenden folgt.*

Wir wollen zum Schlusse noch entscheiden, wann in Ungleichung (6) das Zeichen $=$ zu gelten hat. Für Ungleichung (2) ist dies dann und nur dann der Fall, wenn das Gleichungssystem

$$a_i \alpha - b_i \beta = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

eine Lösung $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $\alpha + \beta > 0$ zuläßt. Daraus folgt, daß in (6) das Zeichen $=$ dann und nur dann gilt, wenn es eine Nullfunktion der Form $\alpha f(x) - \beta g(x)$ $(\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \alpha + \beta > 0)$ gibt.

§ 3.

Die Funktionenklasse $[L^p]$.

Das Produkt von irgend zwei meßbaren Funktionen ist wieder eine meßbare Funktion. Dagegen folgt aus der Integrierbarkeit zweier Funktionen noch keineswegs die Integrierbarkeit ihres Produktes.

Eine hinreichende Bedingung für die Integrierbarkeit des Produktes zweier meßbarer Funktionen haben wir im vorhergehenden Paragraphen an Hand der Ungleichung (5) angegeben. Danach ist das Produkt der Funktionen $f(x)$, $h(x)$ sicher integrierbar, wenn es eine Zahl $p > 1$ gibt, derart daß die Funktionen $|f(x)|^p$, $|h(x)|^{\frac{p}{p-1}}$ integrierbar ausfallen. Wir zeigen nun, daß diese Bedingung in gewissem Sinne auch notwendig ist. Wir beweisen nämlich den Satz:

Ist das Produkt $f(x)$, $h(x)$ für alle integrierbaren Funktionen $f(x)$, für welche die Potenz $|f(x)|^p$ $(p > 1)$ integrierbar ist, ebenfalls integrierbar, so ist es auch die Potenz $|h(x)|^{\frac{p}{p-1}}$.

Um den Beweis zu führen, nehmen wir im Widerspruche zu unserem Satze an, es gebe eine Funktion $h(x)$, so daß jedes jener Produkte integrierbar, die Potenz $|h(x)|^{\frac{p}{p-1}}$ dagegen nicht integrierbar sei. Da die Produkte $f(x)h(x)$ und $|f(x)|\,|h(x)|$ gleichzeitig integrierbar oder nicht integrierbar sind, dürfen wir $h(x)$ durch $|h(x)|$ ersetzen resp. wir dürfen annehmen, der Wertevorrat von $h(x)$ bestehe aus positiven Werten und ev. aus 0. Setzen wir ferner $f(x) \equiv 1$, so folgt aus unserer Annahme die Integrierbarkeit, somit sicher die Meßbarkeit von $h(x)$. Dann gibt es aber

auch eine integrierbare Funktion $h^*(x)$, welche nur abzählbar endlich viele verschiedene, ausschließlich positive Werte besitzt und welche die Ungleichung
$$|h(x) - h^*(x)| < \varepsilon$$
befriedigt. Dieser Ungleichung zufolge ist dann auch die Funktion $|h^*(x)|^{\frac{p}{p-1}}$ sicher nicht integrierbar.

Der Wertevorrat der Funktion $h^*(x)$ bestehe aus den Werten $a_1, a_2, \cdots$; sie nehme den Wert a_i auf der Menge $\mathfrak{M}_i$ vom Maße m_i an. Dann konvergiert die Reihe
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i m_i = \int_{\mathfrak{M}} f^*(x)\,dx,$$
die dem Integrale
$$\int_{\mathfrak{M}} [h^*(x)]^{\frac{p}{p-1}}\,dx$$
entsprechende Reihe
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{p}{p-1}} m_i$$
aber divergiert.

Nach einem Satze des Herrn Landau gibt es nun zu jeder divergenten Reihe
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{p}{p-1}} m_i$$
eine Folge positiver Zahlen b_i derart, daß
$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^p m_i$$
konvergiert, die Reihe
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i m_i$$
aber divergiert.*) Für die durch die Vorschrift
$$f(x) \equiv b_i \quad \text{für} \quad x \text{ in } \mathfrak{M}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$
erklärte Funktion ist somit die Potenz $|f(x)|^p$ integrierbar, das Produkt $f(x)\,h^*(x)$ dagegen nicht integrierbar. Nun ist aber zufolge der Ungleichung
$$|f(x)(h(x) - h^*(x))| < \varepsilon f(x)$$

*) E. Landau, „Über einen Konvergenzsatz", l. cit. An Stelle der dort auftretenden Größen a_i, x_i sind hier $a_i m_i^{\frac{p-1}{p}}$ resp. $b_i m_i^{\frac{1}{p}}$ zu setzen.

die meßbare Funktion

$$\Phi(x) = f(x)h(x) - f(x)h^*(x)$$

ebenfalls integrierbar. Das Produkt

$$f(x)h(x) = \Phi(x) + f(x)h^*(x)$$

wäre somit, unserer Annahme zuwider, nicht integrierbar. Damit ist unser Satz bewiesen.

Bezeichnen wir die Gesamtheit jener integrierbaren Funktionen, für welche die p^{te} Potenz des absoluten Betrages (also auf Grund der Ungleichung (10) auch alle niedrigeren Potenzen) integrierbar ist, als Funktionenklasse $[L^p]$, so besagen unser Satz und die Ungleichung (5), daß *jede der Klassen* $[L^p]$, $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ *genau aus jenen Funktionen besteht, die mit jeder Funktion der andern Klasse multipliziert, integrierbare Produkte ergeben.* Ist $p = 2$, so ist auch $\frac{p}{p-1} = 2$; die Klasse $[L^2]$ hat somit die Eigenschaft, daß *jede Funktion, die mit allen Funktionen der Klasse integrierbare Produkte ergibt, selbst der Klasse angehört.* In dieser Eigenschaft der Klasse $[L^2]$ liegt ein Grund dafür, daß dieselbe in allen Fragestellungen, in welchen das Produktintegral auftritt, eine ausgezeichnete Rolle spielt. Sucht man dann die für die Klasse $[L^2]$ geltenden Resultate auf andere Klassen $[L^p]$ auszudehnen, so müssen die Klassen $[L^p]$, $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ gleichzeitig betrachtet werden.

Für das Weitere ist es noch wichtig, festzustellen, daß *die Klasse* $[L^p]$ *alle linearen Verknüpfungen je einer endlichen Anzahl in ihr enthaltener Funktionen ebenfalls enthält.* Dies folgt aus Ungleichung (8). Die Nullfunktionen sind in allen Klassen $[L^p]$ enthalten.

§ 4.

Satz über die Annäherung der Funktionen der Klasse $[L^p]$ durch streckenweise konstante Funktionen.

Wir setzen nun für das Weitere der Einfachheit zuliebe voraus, daß die Funktionen, mit denen wir arbeiten, auf einer Strecke (a, b) definiert sind. Als Funktionswerte lassen wir auch weiterhin beliebige komplexe Werte zu.

Wir beweisen folgenden Satz:

Ist $f(x)$ *irgend eine Funktion der Klasse* $[L^p]$, δ *eine beliebig kleine positive Größe, so gibt es eine streckenweise konstante Funktion*)* $\varphi(x)$ *derart, daß die Ungleichung*

*) D. i. eine Funktion, die nur auf einer endlichen Anzahl von Strecken verschiedene Werte annimmt.

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p \, dx \leqq \delta^p$$

besteht.

Um eine solche Funktion $\varphi(x)$ zu erhalten, bestimmt man zunächst eine Funktion $f_1(x)$, die höchstens abzählbar unendlich viel verschiedene Werte annimmt, derart, daß — höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge —

$$|f(x) - f_1(x)| \leqq \frac{\delta}{3(b-a)^{\frac{1}{p}}},$$

also

$$\int_a^b |f(x) - f_1(x)|^p \, dx \leqq \left(\frac{\delta}{3}\right)^p \tag{11}$$

sei. Das Integral von $|f_1(x)|^p$ wird dann durch eine konvergente Reihe dargestellt, von der jedes Glied nur von einem einzigen Werte von $f_1(x)$ abhängt; bricht man nach einer genügend großen Anzahl von Gliedern derart ab, daß der Rest $\leqq \left(\frac{\delta}{3}\right)^p$ ausfalle, so stellt die endliche Reihe das Integral einer Funktion $f_1(x)$ dar, die nunmehr nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte annimmt, und für welche

$$\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|^p \, dx \leqq \left(\frac{\delta}{3}\right)^p \tag{12}$$

ausfällt.

Wir schreiben die Funktion $f_2(x)$ in der Form

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{l} \gamma_i f_{2,i}(x),$$

wo jede der Funktionen $f_{2,i}(x)$ nur die Werte 0, 1 annimmt und kein Glied überall verschwindet. Nun aber kann man (laut Definition der Meßbarkeit) die meßbare Menge $\mathfrak{M}_{2,i}$ der Werte x, für welche

$$f_{2,i}(x) = 1$$

ist, in der Form $\mathfrak{M}'_{2,i} + \mathfrak{M}''_{2,i} - \mathfrak{M}'''_{2,i}$ darstellen, wo die Menge $\mathfrak{M}'_{2,i}$ aus einer endlichen Anzahl von Strecken besteht, während die beiden Mengen $\mathfrak{M}''_{2,i}$, $\mathfrak{M}'''_{2,i}$ dem Inhaltsmaße nach kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Größe ausfallen. Wählen wir diese Größe gleich

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{3l|\gamma_i|}\right)^p$$

und bedeutet $f_{3,i}(x)$ jene Funktion, welche an den Stellen der Menge $\mathfrak{M}'_{2,i}$ den Wert 1, sonst den Wert 0 annimmt, so ist

$$\int_a^b |f_{2,i}(x) - f_{3,i}(x)|^p dx \leqq \left(\frac{\delta}{3l|\gamma_i|}\right)^p.$$

Daraus folgt nach (8), wenn wir

$$\sum_{i=1}^{l} \gamma_i f_{3,i}(x) = f_3(x)$$

setzen,

$$(13) \qquad \int_a^b |f_2(x) - f_3(x)|^p dx \leqq \left(\frac{\delta}{3}\right)^p.$$

Aus (11), (12) und (13) folgt wieder auf Grund von (8)

$$\int_a^b |f(x) - f_3(x)|^p dx \leqq \delta^p.$$

Die streckenweise konstante Funktion $f_3(x)$ ist also von der geforderten Eigenschaft. Damit ist unser Satz bewiesen.

Man sieht auch leicht ein, daß wir die Werte γ_i rational (d. i. reeller und imaginärer Teil rational) und auch die Mengen $\mathfrak{M}'_{2,i}$ so hätten wählen können, daß die Konstanzstrecken der Funktionen $f_{3,i}(x)$ rationale Teile der Strecke (a, b) seien. Dann würde auch die Funktion $f_3(x)$ *nur rationale Werte* besitzen und ihre Konstanzstrecken wären *rationale Teile von* (a, b).

Wir teilen noch ohne Beweis eine interessante Vertiefung unseres Satzes mit, die wir aber in der vorliegenden Arbeit nicht benützen: Man kann die streckenweise konstante Funktion $\varphi(x)$, die der Forderung des Satzes genügen soll, auch auf die Weise bestimmen, daß man die Strecke (a, b) in genügend kleine Teilstrecken zerlegt und für jede dieser Teilstrecken der Funktion $\varphi(x)$ als konstanten Wert den *Integralmittelwert* von $f(x)$ auf derselben Teilstrecke zuordnet. Man gewinnt hiemit, wenn man noch die Entwickelungen des nächsten Paragraphen beachtet, unmittelbaren Anschluß an einen von Hellinger eingeführten neuen Integralbegriff.*)

---

*) E. Hellinger, „Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Variablen". Dissertation, Göttingen 1907.

§ 5.
Das unbestimmte Integral der Funktionen einer Klasse $[L^p]$.

Wir beweisen hier den Satz:

Damit die Funktion $F(x)$ ein Integral einer Funktion der Klasse $[L^p]$ darstelle, ist es notwendig und hinreichend, daß die Summe

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{|F(x_{k+1}) - F(x_k)|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}} \tag{14}$$

*unter einer von der Anzahl m der Teilstrecken (x_k, x_{k+1}) und der Art der Einteilung unabhängigen Schranke liege.**)

Daß die Bedingung eine notwendige ist, zeigt folgende Überlegung: Wir nehmen an, es gebe eine Funktion $f(x)$ aus $[L^p]$ derart, daß für jede Strecke (x_k, x_{k+1})

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = F(x_{k+1}) - F(x_k)$$

ist. Laut Ungleichung (9) ist dann

$$|F(x_{k+1}) - F(x_k)|^p \leqq \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)|\,dx\right]^p \leqq (x_{k+1} - x_k)^{p-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)|^p\,dx.$$

Daraus folgt, daß die Summe (14) $\leqq \int_a^b |f(x)|^p\,dx$ sein muß. Die Bedingung ist also eine notwendige.

Daß die Bedingung auch hinreicht, ergibt sich durch folgende Überlegung: Die obere Schranke von (14) sei G^p. Dann gelten auch die Ungleichungen

$$|F(x+\varepsilon) - F(x)| \leqq G|\varepsilon|^{\frac{p-1}{p}},$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \leqq G\left[\sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k)\right]^{\frac{p-1}{p}} = G(b-a)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Die erste der beiden Ungleichungen besagt die Stetigkeit der Funktion $F(x)$, die zweite, daß sie beschränkter Schwankung ist. Hieraus folgt

*) Auch E. Fischer („Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne", l. cit.) gibt für den Fall $p = 2$ Bedingungen an, die sich auf beliebige $p > 1$ ausdehnen lassen. Ihre Begründung müßte jedoch gewisse Resultate voraussetzen, die wir erst später entwickeln werden, wobei wir uns eben auf das hier angegebene Kriterium stützen.

nach Lebesgue, daß $F(x)$ für alle x höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge eine Derivierte $f(x)$ besitzt*); dieselbe ist im wesentlichen Grenzfunktion der durch die Vorschrift

$$\varphi_n(x) = \frac{F(x_{n,k+1}) - F(x_{n,k})}{x_{n,k+1} - x_{n,k}} \qquad (x_{n,k} \leqq x < x_{n,k+1})$$

definierten Funktionen für

$$\lim_{n=\infty} \max_k (x_{n,k+1} - x_{n,k}) = 0.$$

Da nun laut der behaupteten Bedingung für alle n

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^p dx \leqq G^p$$

ist, so ist nach einem leicht zu beweisenden Satze von Fatou**) klar, daß auch die Grenzfunktion der $|\varphi_n(x)|^p$, d. i. $|f(x)|^p$ integrierbar ist, und ihr Integralwert $\leqq G^p$ ausfällt. Da $f(x)$ auch sicher meßbar ist, so ist sie eine Funktion der Klasse $[L^p]$.

Wir haben noch zu zeigen, daß

$$\int_a^x f(x)\, dx = F(x) - F(a)$$

ist. Dies gilt a fortiori, wenn wir die Richtigkeit der Grenzgleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|\, dx = 0$$

darlegen. Nun gibt es nach einem Satze von Lebesgue, da die $\varphi_n(x)$ durchweg gegen $f(x)$ konvergieren, bei beliebig klein vorgegebenem δ eine Zahl $\nu = \nu(\delta)$ derart, daß für alle $n > \nu$ das Inhaltsmaß der Menge $M_{n,\delta}[|f(x) - \varphi_n(x)| > \delta]$ kleiner als δ ausfällt. Man schätzt nun den Wert des in der Grenzgleichung stehenden Integrals mit Hilfe der Ungleichungen

$$\int_{(a,b)-\mathfrak{M}_{n,\delta}} |f(x) - \varphi_n(x)|\, dx \leqq \delta(a-b), \quad \int_{\mathfrak{M}_{n,\delta}} |f(x)|\, dx \leqq \delta^{\frac{p-1}{p}} \Big[\int_{\mathfrak{M}_{n,\delta}} |f(x)|^p dx\Big]^{\frac{1}{p}} \leqq \delta^{\frac{p-1}{p}} G,$$

$$\int_{\mathfrak{M}_{n,\delta}} |\varphi_n(x)|\, dx \leqq \delta^{\frac{p-1}{p}} \Big[\int_{\mathfrak{M}_{n,\delta}} |\varphi_n(x)|^p dx\Big]^{\frac{1}{p}} \leqq \delta^{\frac{p-1}{p}} G$$

---

*) H. Lebesgue, „Leçons sur l'intégration etc.", S. 128. Es würde auch schon die Heranziehung des weniger tief liegenden Satzes, nach welchem $F(x)$ derivierte Funktionen besitzt, hinreichen.

**) P. Fatou, „Séries trigonométriques etc.", l. cit., S. 375.

ab; u. zw. wird

$$\int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)|\, dx \leqq \delta(a-b) + 2\delta^{\frac{p-1}{p}} G$$

für alle $n > \nu(\delta)$, woraus, da δ beliebig klein gewählt werden darf, die behauptete Grenzgleichung folgt.

§ 6.

Starke und schwache Konvergenz in bezug auf den Exponenten p.

Wir werden im folgenden das Bestehen der Grenzgleichung

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b |f(x) - f_i(x)|^p\, dx = 0,$$

wo $f(x)$ und die $f_n(x)$ der Klasse $[L^p]$ angehören, dadurch ausdrücken, daß wir sagen: *die Folge $\{f_i(x)\}$ konvergiert in bezug auf den Exponenten p stark gegen die Funktion $f(x)$.**)

Beispiele stark konvergenter Folgen, die nicht trivial sind, liefern die Entwicklungen des § 4. Ganz trivial ist z. B. die starke Konvergenz bei gleichmäßig konvergenten Folgen. Man erkennt aber leicht an Beispielen, daß stark konvergente Folgen nicht im gewöhnlichen Sinne — selbst nicht bei Ausnahme einer Nullmenge — zu konvergieren brauchen.

Man schließt mit Hilfe der Ungleichungen (5), (6) äußerst leicht, daß *aus der starken Konvergenz der Folge $\{f_i(x)\}$ gegen $f(x)$ auch das Bestehen der Grenzgleichungen*

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b f_i(x)\, g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx; \quad \lim_{i=\infty} \int_a^b |f_i(x)|^p dx = \int_a^b |f(x)|^p dx$$

folgt; in der ersten der beiden Gleichungen bedeutet $g(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$.

Wir führen nun noch einen umfassenderen Konvergenzbegriff ein. *Auch diese Konvergenz wird noch das Bestehen der ersten Grenzgleichung sichern, während die zweite Grenzgleichung durch die Ungleichung*

$$\overline{\lim_{i=\infty}} \int_a^b |f_i(x)|^p dx \geqq \int_a^b |f(x)|^p dx \tag{15}$$

zu ersetzen sein wird.

---

*) Für $p = 2$ „convergence en moyenne“ bei E. Fischer „Sur la convergence en moyenne“, l. cit.

Zu diesem Zwecke definieren wir: *Die Folge* $\{f_i(x)\}$ *von Funktionen der Klasse* $[L^p]$ *konvergiert in bezug auf den Exponenten* p *schwach gegen die Funktion* $f(x)$ *derselben Klasse, wenn* a) *die Integralwerte*

$$\int_a^b |f_i(x)|^p dx$$

insgesamt unterhalb einer endlichen Schranke liegen; b) *für alle Stellen* $a \leqq x \leqq b$

$$\lim_{i=\infty} \int_a^x f_i(x)\,dx = \int_a^x f(x)\,dx$$

*ausfällt.**)

Jede in bezug auf den Exponenten p stark konvergente Folge konvergiert auch schwach in bezug auf p, und zwar gegen dieselbe Grenzfunktion. Daß aber eine schwach konvergente Folge nicht unbedingt auch stark konvergiert, zeigen die Folgen $\{\sin kx\}$, $\{\cos kx\}$, die in bezug auf alle Exponenten p schwach, dagegen in bezug auf keinen Exponenten stark konvergieren.

Das Bestehen der Grenzgleichung

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b f_i(x)\,\gamma(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\gamma(x)\,dx \tag{16}$$

folgt, wenn $\gamma(x)$ eine streckenweise konstante Funktion ist, aus Voraussetzung b). Auf Grund der Voraussetzung a), nach welcher die Integralwerte der $|f_i(x)|^p$ sämtlich unterhalb einer Schranke G^p liegen, überträgt man jene Grenzgleichung mit Hilfe des Satzes in § 4 auf sämtliche Funktionen $g(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$. Denn aus der Ungleichung

$$\int_a^b |g(x)-\gamma(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \leqq \delta^{\frac{p}{p-1}}$$

folgt auf Grund von (5) nach Beachtung von (16)

$$\overline{\lim_{i=\infty}} \left| \int_a^b [f(x)-f_i(x)]\,g(x)\,dx \right| \leqq \overline{\lim_{i=\infty}} \left| \int_a^b [f(x)-f_i(x)]\,[g(x)-\gamma(x)]\,dx \right|$$
$$\leqq \delta \left\{ \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + G \right\}.$$

*) Für $p=2$ steht der hier eingeführte Begriff der schwachen Konvergenz in engem Zusammenhange mit jenem Konvergenzbegriffe, dessen sich Hilbert zur Definition der *vollstetigen* Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen bedient; indem nämlich der schwachen Konvergenz einer Folge von Funktionen jene Hilbertsche Konvergenz ihrer Fourierschen Konstanten entspricht.

Daraus schließt man, da δ beliebig klein gewählt werden darf,

$$(17) \qquad \lim_{i=\infty} \int_a^b [f(x) - f_i(x)]\, g(x)\, dx = 0.^{*)}$$

Um das Bestehen der Ungleichung (15) zu beweisen, erklären wir eine Funktion $g(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ durch

$$g(x) = |f(x)|^{p-1}\, \overline{\operatorname{sign}}\, f(x).$$

Dann ist

$$|f(x)|^p = f(x)\, g(x),$$

und somit nach (17)

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = \lim_{i=\infty} \int_a^b f_i(x)\, g(x)\, dx.$$

Daraus folgt auf Grund von (5)

$$\left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^p \leqq \overline{\lim} \left[\int_a^b |f_i(x)|^p dx\right] \left[\int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx\right]^{p-1}$$

$$= \overline{\lim} \left[\int_a^b |f_i(x)|^p dx\right] \left[\int_a^b |f(x)|^p dx\right]^{p-1},$$

d. i. Ungleichung (15).

Wir bemerken noch, daß auf Grund der Ungleichung (8) die starke oder schwache Konvergenz der Folgen $\{f_i^{(1)}(x)\}, \cdots, \{f_i^{(k)}(x)\}$ gegen $f^{(1)}(x), \cdots, f^{(k)}(x)$ sich auf die Verbindungen $\{c_1 f_i^{(1)}(x) + \cdots + c_k f_i^{(k)}(x)\}$, $c_1 f^{(1)}(x) + \cdots + c_k f^{(k)}(x)$ überträgt.

§ 7.

Hauptsatz über schwache Konvergenz.

Wir beweisen den folgenden Existenzsatz, der an den grundlegenden Weierstraßschen Satz über Punktmengen erinnert:

Besitzt eine Mannigfaltigkeit von Funktionen aus $[L^p]$ *folgende beide Eigenschaften:*

---

*) Es ist wohl nicht uninteressant zu bemerken, daß auch umgekehrt *aus dem Bestehen der Grenzgleichung* (17) *für alle* $g(x)$ *aus* $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ *die schwache Konvergenz von* $\{f_i(x)\}$ *gegen* $f(x)$ *folgt.* Der Beweis ist leicht zu erbringen. Vgl. für $p = 2$ die bereits erwähnte neue Arbeit von H. Lebesgue „Sur les intégrales singulières", l. cit., S. 56.

1) *sie ist unendlich**);

2) *sie ist beschränkt in bezug auf den Exponenten* p, *d. i. die Integralwerte*

$$\int_a^b |f(x)|^p dx$$

liegen für alle Funktionen der Mannigfaltigkeit unterhalb einer Schranke G^p;

dann enthält die Mannigfaltigkeit sicher Teilfolgen, die in bezug auf den Exponenten p *schwach konvergieren.*

Um eine solche Teilfolge zu bestimmen, bilden wir die Integrale

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

sämtlicher Funktionen der gegebenen Mannigfaltigkeit. Für alle F ist

$$F(0) = 0, \quad |F(x_1) - F(x_2)| = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \leqq |x_1 - x_2|^{\frac{p-1}{p}} G.$$

Somit sind die Funktionen $F(x)$ in ihrer Gesamtheit beschränkt und gleichmäßig stetig (également continues). Nach einem Satze von Arzelà**) enthält daher die Mannigfaltigkeit der $F(x)$ sicher eine Teilfolge $\left\{F_i(x) = \int_a^x f_i(x)\,dx\right\}$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $F^*(x)$ konvergiert.

Teilen wir nun die Strecke (a, b) in eine beliebige Anzahl von Teilstrecken (x_k, x_{k+1}), so besteht für alle Funktionen $F(x)$ die Ungleichung

$$\sum_k \frac{|F(x_{k+1}) - F(x_k)|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}} \leqq \int_a^b |f(x)|^p dx \leqq G^p.$$

Durch Anwendung der Ungleichung auf die Funktionen $F_i(x)$ und durch Grenzübergang folgt

$$\sum_k \frac{|F^*(x_{k+1}) - F^*(x_k)|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}} \leqq G^p.$$

Also ist nach § 5 $F^*(x)$ Integral einer Funktion $f^*(x)$ aus $[L^p]$; und zwar ist wegen $F^*(a) = 0$

$$F^*(x) = \int_a^x f^*(x)\,dx.$$

---

*) Es darf in der Mannigfaltigkeit dieselbe Funktion mehrfach, ja sogar unendlich oft vorkommen, in letzterem Falle ist der Satz trivial.

**) C. Arzelà, „Sulle serie di funzioni", Memorie d. R. Accad. d. Scienze di Bologna, sezione d. Sc. Fis. e Mat., serie 5, t. VIII (1899—1900), S. 3—58, 91—134.

Man hat also

$$\lim_{i=\infty} \int_a^x f_i(x)\,dx = \int_a^x f^*(x)\,dx,$$

und da noch die Integrale der $|f_i(x)|^p$ unter der Schranke G^p liegen, so konvergiert $\{f_i(x)\}$ in bezug auf den Exponenten p schwach gegen $f^*(x)$.

Man sieht auch zugleich, daß, sobald nicht sämtliche Teilfolgen der Mannigfaltigkeit schwach in bezug auf den Exponenten p gegen $f^*(x)$ konvergieren, sicher eine von $f^*(x)$ wesentlich verschiedene Grenzfunktion $f^{**}(x)$ vorhanden ist, usf.

Eine interessante Anwendung gestattet unser Hauptsatz bei der Ausdehnung des Fischerschen Satzes*) auf alle $p > 1$, von der wir jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht Gebrauch machen. Der Satz besagt in dieser ausgedehnteren Fassung, daß *aus der Grenzgleichung*

$$(18) \qquad \lim_{i=\infty,\, j=\infty} \int_a^b |f_i(x) - f_j(x)|^p dx = 0,$$

*wo $\{f_i(x)\}$ eine Folge der Funktionen der Klasse $[L^p]$ bedeutet, die Existenz einer Funktion $f(x)$ derselben Klasse folgt, gegen welche $\{f_i(x)\}$ in bezug auf den Exponenten p stark konvergiert.***)

Der Beweis gestaltet sich folgendermaßen: Aus (18) folgt leicht, daß die Integralwerte der $|f_i(x)|^p$ unterhalb einer endlichen Schranke liegen. Auf Grund unseres Hauptsatzes erschließt man hieraus die Existenz einer Teilfolge $\{f_{i_k}(x)\}$, die in bezug auf den Exponenten p schwach gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert. Dann konvergiert auch die Folge $\{f_{i_k}(x) - f_j(x)\}$ in bezug auf p schwach gegen $f(x) - f_j(x)$. Durch Anwendung von (15) auf diese Folge schließt man

$$\int_a^b |f(x) - f_j(x)|^p dx \leqq \overline{\lim_{k=\infty}} \int_a^b |f_{i_k}(x) - f_j(x)|^p dx\,;$$

woraus nach Beachtung von (18) die Grenzgleichung

$$\lim_{j=\infty} \int_a^b |f(x) - f_j(x)|^p dx = 0$$

folgt.

---

*) E. Fischer, „Sur la convergence en moyenne", l. cit.

**) Vgl. F. Riesz, „Sur les suites de fonctions mesurables", l. cit., wo derselbe Satz (auch für $0 < p \leqq 1$) auf andere Weise entwickelt wird. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt (doch nur für $p > 1$) unmittelbar aus Ungleichung (6).

§ 8.

Bedingung für die Lösbarkeit eines Systems linearer Integralgleichungen. Die Bedingung ist notwendig.

Es liege ein endliches oder abzählbar unendliches System von linearen Integralgleichungen

$$\int_a^b f_i(x)\,\xi(x)\,dx = c_i \qquad (i=1,2,\cdots) \tag{19}$$

vor. Die Koeffizientenfunktionen $f_i(x)$ gehören der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ an.

Wir stellen uns die Aufgabe, Bedingungen zu ermitteln, unter welchen das System (19) durch eine Funktion $\xi(x)$ der Klasse $[L^p]$ befriedigt werden kann.

Für den Fall $p=2$ ist die Aufgabe bereits erledigt. Denn es können die Resultate von E. Schmidt über Systeme linearer Gleichungen mit abzählbar unendlich vielen Unbekannten, wie wir dies schon in der Einleitung angedeutet haben, in solche über das System (19) übersetzt werden; man kann aber auch die von Schmidt verwendete Methode unmittelbar auf unsere Aufgabe übertragen, indem man seinen Konvergenzsatz durch den Fischerschen ersetzt. Die Ausdehnung dieser gewissermaßen geometrischen Methode auf beliebige Exponenten scheint dagegen auf unhebbare Schwierigkeiten zu stoßen. Demgemäß weicht unsere Methode, die auch im Falle $p=2$ manches Neue bieten dürfte, wesentlich von der Schmidtschen ab.

Eine notwendige Bedingung ergibt sich rasch durch folgende Überlegung: Wir nehmen an, das System (19) lasse sich durch eine Funktion $\xi^0(x)$ der Klasse $[L^p]$ befriedigen. Dann erfüllt $\xi^0(x)$ auch jede Gleichung

$$\int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \mu_i f_i(x)\right] \xi(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \mu_i c_i;$$

$\mu_1, \cdots, \mu_n$ sind beliebige reelle oder komplexe Zahlen. Auf Grund der Ungleichung (5) ist dann

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n \mu_i c_i\right|^{\frac{p}{p-1}} &= \left|\int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \mu_i f_i(x)\right] \xi^0(x)\,dx\right|^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leqq \left[\int_a^b |\xi_0(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p-1}} \int_a^b \left|\sum_{i=1}^n \mu_i f_i(x)\right|^{\frac{p}{p-1}} dx.\end{aligned} \tag{20}$$

Wir haben somit die notwendige Bedingung: *Es muß eine endliche Größe M geben derart, daß für jedes n* (resp. wenn nur n Gleichungen vorliegen, für dieses n) *und für jedes beliebige System reeller oder komplexer Zahlen* $\mu_1, \cdots, \mu_n$ *die Ungleichung*

$$(21) \qquad \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right|^{\frac{p}{p-1}} \leqq M^{\frac{p}{p-1}} \int_p^b \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x)\right|^{\frac{p}{p-1}} dx$$

bestehe.

Wir werden in der Folge zeigen, daß diese Bedingung auch *hinreicht.*

§ 9.

Die Bedingung ist hinreichend: Endlich viele Gleichungen.

Wir betrachten zunächst eine endliche Anzahl, etwa n Gleichungen

$$(22) \qquad \int_a^b f_i(x)\,\xi(x)\,dx = c_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

und nehmen an, daß für das System (22) die Bedingung erfüllt ist.

Wir setzen

$$f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i f_i(x), \qquad \Phi(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \int_a^b |f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)|^{\frac{p}{p-1}} dx,$$

$$\Gamma(\mu_1, \cdots, \mu_n) = \left|\sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i\right|^{\frac{p}{p-1}}.$$

Die Funktion $\Gamma(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ der n Veränderlichen $\mu_1, \cdots, \mu_n$ ist überall stetig. Sie ist ferner als Funktion der $2n$ reellen Veränderlichen

$$\mu_1', \mu_1'', \cdots, \mu_n', \mu_n'' \quad \left(\mu_i = \mu_i' + \mu_i'' \sqrt{-1}\right)$$

nach jeder dieser Veränderlichen sicher einmal stetig differenzierbar, u. zw. ist

$$(23) \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu_i'} - i\,\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu_i''} = \frac{p}{p-1}\, c_i\, \Gamma^{\frac{1}{p}}\, \overline{\operatorname{sign} \sum_{j=1}^{n} \mu_j c_j}.$$

Ebenso ist auch, wenn alle Funktionen $f_i(x)$ an der Stelle x eindeutig bestimmte endliche Werte besitzen (also höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge), die Funktion $|f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)|^{\frac{p}{p-1}}$ in den Veränderlichen $\mu_1, \cdots, \mu_n$ stetig und nach den Veränderlichen $\mu_1', \mu_1'', \cdots, \mu_n', \mu_n''$ sicher einmal stetig differenzierbar. Es ist

$$\frac{\partial |f|^{\frac{p}{p-1}}}{\partial \mu_i'} - i\,\frac{\partial |f|^{\frac{p}{p-1}}}{\partial \mu_i''} = \frac{p}{p-1} f_i(x)\, |f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)|^{\frac{1}{p-1}}\, \overline{\operatorname{sign} f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)}.$$

Auf Grund des Rolleschen Satzes folgt nun ferner, daß auch die $2n$ Quotienten

$$\frac{|f(\cdots \mu_i + h, \cdots)|^{\frac{p}{p-1}} - |f(\cdots \mu_i, \cdots)|^{\frac{p}{p-1}}}{|h|},$$

$$\frac{|f(\cdots \mu_i + h\sqrt{-1}, \cdots)|^{\frac{p}{p-1}} - |f(\cdots \mu_i, \cdots)|^{\frac{p}{p-1}}}{|h|},$$

wenn nur $|h| < H$ vorausgesetzt wird, unterhalb einer integrierbaren Funktion $F(x, \mu_1, \cdots, \mu_n, H)$ liegen, die man auch leicht angeben kann. Daraus folgt auf Grund des Lebesgueschen Satzes über Integration von Funktionenfolgen*) die Vertauschbarkeit der Differentiation und der Integration in den Ausdrücken

$$\frac{\partial \int\limits_a^b |f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)|^{\frac{p}{p-1}} dx}{\partial \mu_i'}, \qquad \frac{\partial \int\limits_a^b |f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)|^{\frac{1}{p-1}} dx}{\partial \mu_i''}.$$

Somit ist auch $\Phi(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ nach den μ_i', μ_i'' sicher einmal stetig differenzierbar; man findet

$$(24) \quad \frac{\partial \Phi(\mu_1, \cdots, \mu_n)}{\partial \mu_i'} - i \frac{\partial \Phi(\mu_1, \cdots, \mu_n)}{\partial \mu_i''} = \frac{p}{p-1} \int\limits_a^b f_i(x) |f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)|^{\frac{p}{p-1}} \overline{\operatorname{sign} f(x\ \mu_1, \cdots, \mu_n)}\, dx.$$

Wir treffen nun noch für den Augenblick die Voraussetzung, die sich dann bald wieder aufheben läßt, die Funktionen $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ seien linear unabhängig, d. i. es gäbe außer $\mu_1 = 0, \cdots, \mu_n = 0$ kein System der μ_i, für welches $f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)$ eine Nullfunktion wäre. Unterwerfen wir dann $\Phi(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ der Bedingung, unterhalb einer endlichen Schranke zu verbleiben, so liegen auch die Werte $|\mu_i|$ unter einer endlichen Schranke. Da noch Γ und Φ stetig von den μ_i abhängen, so erreicht Γ bei der Nebenbedingung $\Phi = 1$ ihre obere Grenze für ein Wertsystem $\mu_1, \cdots, \mu_n$. Mittels des klassischen Verfahrens zur Behandlung von Extremumsaufgaben mit Nebenbedingungen ergibt sich nach Heranziehung von (23) und (24), daß das Wertsystem $\mu_1, \cdots, \mu_n$ bei einem noch zu bestimmenden Werte λ die Gleichungen

$$(25) \quad c_i \Gamma^{\frac{1}{p}} \overline{\operatorname{sign} \sum_{j=1}^{n} \mu_j c_j} = \lambda \int\limits_a^b f_i(x) |f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)|^{\frac{1}{p-1}} \overline{\operatorname{sign} f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)}\, dx$$

$$(i = 1, \cdots, n)$$

$$(26) \qquad \Phi = 1$$

befriedigt.

*) H. Lebesgue, „Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm“, Bulletin de la Société Mathématique, t. 36 (1908), S. 11; „Sur les intégrales singulières“, l. cit., S. 50.

Durch Multiplizieren der einzelnen Gleichungen des Systems (25) mit μ_i, Addition und Einsetzen von (26) folgt

$$\lambda = \Gamma$$

und somit

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j c_j \int_a^b f_i(x) \, |f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)|^{\frac{1}{p-1}} \, \overline{\operatorname{sign}} \, f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n) \, dx = c_i.$$

Setzt man also

$$\xi^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i c_i \, |f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)|^{\frac{1}{p-1}} \, \overline{\operatorname{sign}} \, f(x, \mu_1, \cdots, \mu_n), \tag{27}$$

so ist $\xi^{(n)}(x)$ eine lösende Funktion des Systems (22).

Auf Grund der Gleichung (27) folgt

$$\int_a^b |\xi^{(n)}(x)|^p \, dx = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i \right|^p = \Gamma^{p-1},$$

und daraus nach Heranziehung der Ungleichung (20):

$$\int_a^b |\xi^{(n)}(x)|^p \, dx \leqq M^p. \tag{28}$$

Letztere Ungleichung *kann durch eine Gleichung ersetzt werden.* Bedeutet nämlich $M^{(n)}$ die *kleinste* Zahl, die bei beliebigen $\mu_1, \cdots, \mu_n$ die Ungleichung befriedigt, dann ist $M^{(n)\frac{1}{p-1}}$ der Maximalwert von Γ bei der Nebenbedingung (26), den dieselbe bei jenem speziellen Wertsysteme der μ_i erreicht, welches wir zugleich zur Definition der Funktion $\xi^{(n)}(x)$ verwendeten. Es ist also

$$\int_a^b |\xi^{(n)}(x)|^p \, dx = (M^{(n)})^p. \tag{29}$$

Da andererseits auf Grund der Ungleichung (20) für jede Lösung $\xi(x)$ des Systems (22)

$$\int_a^b |\xi(x)|^p \, dx \geqq (M^{(n)})^p$$

ist, so ist $\xi^{(n)}(x)$ eine solche Lösung des Systems (22), für welche das Integral

$$\int_a^b |\xi(x)|^p \, dx$$

möglichst klein ausfällt. Man schließt auch leicht, daß es keine zweite, von $\xi^{(n)}(x)$ wesentlich verschiedene Lösung $\xi(x)$ derselben Art geben kann. Dies folgt sofort durch Anwendung der Ungleichung (6). Danach wäre

$$\int_a^b \left|\frac{\xi^{(n)}(x)+\xi(x)}{2}\right|^p dx \leqq \left[\frac{1}{2}\left[\int_a^b |\xi^{(n)}(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2}\left[\int_a^b |\xi(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\right]^p = (M^{(n)})^p$$

und da auch $\frac{\xi^{(n)}(x)+\xi(x)}{2}$ das System (22) befriedigt, so könnte nur das Gleichheitszeichen gelten, was nach § 2 nur dann möglich ist, wenn es eine Nullfunktion der Form $\alpha\xi^{(n)}(x) - \beta\xi(x)$ $(\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0, \alpha + \beta > 0)$ gibt. Infolge von (29) muß dann, wenn das System (22) nicht homogen ist, $\xi(x)$ durchwegs $= \xi^{(n)}(x)$ sein. Der homogene Fall ist trivial: die Minimallösungen sind Nullfunktionen und jede Nullfunktion ist eine Minimallösung.

Wir wollen nun noch die Annahme, die Funktionen $f_i(x)$ seien linear unabhängig, wieder aufheben. Es genügt zu bemerken, daß, wenn irgend eine lineare Verbindung der $f_i(x)$ eine Nullfunktion ist, die entsprechende Verbindung der c_i zufolge der Ungleichung (21) verschwinden muß. Es kann daher das System durch Weglassen einzelner Gleichungen in ein äquivalentes System übergeführt werden, das die obige Annahme erfüllt; der Minimalwert von M wird hierdurch nicht geändert. Die Minimallösung des reduzierten Systems ist somit auch eine und im wesentlichen wieder die einzige Minimallösung des ursprünglichen Systems.

§ 10.

Die Bedingung ist hinreichend: Abzählbar unendlich viele Gleichungen.

Es bestehe nun das System (19) aus abzählbar unendlich vielen Gleichungen. Unsere Bedingung sei erfüllt; die kleinstmögliche Zahl M heiße M^*. Dann ist die Bedingung auch für die ersten n Gleichungen erfüllt und es ist $M^{(n)} \leqq M^*$. Es sei $\xi^{(n)}(x)$ die entsprechende Minimallösung. Dann ist also

$$\int_a^b |\xi^{(n)}(x)|^p\,dx = (M^{(n)})^p \leqq (M^*)^p.$$

Die Funktionenfolge $\{\xi^{(n)}(x)\}$ genügt der Forderung des Hauptsatzes über schwache Konvergenz. *Es gibt daher sicher eine Folge von Indizes $n_1, n_2, \cdots$ derart, daß die Funktionenfolge $\xi^{(n_1)}(x), \xi^{(n_2)}(x), \cdots$ in bezug auf den Exponenten p schwach gegen eine Funktion $\xi^*(x)$ der Klasse $[L^p]$ konvergiert.* Auf Grund von (17) ergibt sich dann unmittelbar, daß $\xi^*(x)$

eine Lösung des Systems (19) *darstellt.* Und zwar ist $\xi^*(x)$ Minimallösung; denn auf Grund von (16) ist

$$\int_a^b |\xi^*(x)|^p\,dx \leqq \overline{\lim}\,(M^{(n)})^p \leqq (M^*)^p$$

und somit nach Heranziehung der Ungleichung (20)

$$\int_a^b |\xi^*(x)|^p\,dx = (M^*)^p.$$

Daß $\xi^*(x)$ im wesentlichen die einzige Minimallösung ist, folgt durch dieselbe Überlegung, die wir bei endlichen Systemen geführt haben. Hieraus folgt dann weiter, daß nicht nur eine Auswahl $\{\xi^{(n_i)}(x)\}$, sondern die ganze Folge $\{\xi^{(n)}(x)\}$ schwach gegen $\xi^*(x)$ konvergiert. Denn andernfalls würde die Folge eine Teilfolge enthalten, welche schwach gegen eine von $\xi^*(x)$ wesentlich verschiedene Funktion $\xi^{**}(x)$ konvergierte, und $\xi^{**}(x)$ wäre ebenfalls Minimallösung des Systems (19).

Wir fassen von den Resultaten der drei letzten Paragraphen das, was für die Folge wichtig ist, in dem Satze zusammen:

Ein endliches oder abzählbar unendliches System von linearen Integralgleichungen

$$\int_a^b f_i(x)\,\xi(x)\,dx = c_i \qquad (i = 1, 2, \cdots),$$

deren Koeffizientenfunktionen $f_i(x)$ *der Klasse* $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ *angehören, läßt dann und nur dann eine der Bedingung*

$$\int_a^b |\xi(x)|^p\,dx \leqq M^p$$

genügende lösende Funktion $\xi(x)$ *zu, wenn für alle* n *bei beliebigen Zahlen* μ_i *die Ungleichung*

$$\left|\sum_{i=1}^n \mu_i c_i\right|^{\frac{p}{p-1}} \leqq M^{\frac{1}{p-1}} \int_a^b \left|\sum_{i=1}^n \mu_i f_i(x)\right|^{\frac{p}{p-1}} dx$$

besteht.

Ist speziell M^* *die kleinste Zahl von der geforderten Eigenschaft, so besitzt das System eine einzige der gestellten Bedingung genügende Lösung.**)

---

*) Im Falle $p = 2$ führt dieses Kriterium unschwer zu den bekannten Resultaten. So z. B. läßt sich aus dem in (27) angeschriebenen Ausdrucke für die $\xi^{(n)}(x)$ das Analogon der von Schmidt entwickelten Lösbarkeitsbedingung („Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten", l. c., S. 74) herleiten.

§ 11.

Mehr als abzählbar unendlich viele Gleichungen. Darstellung der linearen Funktionaloperation durch ein Integral.

Unsere Resultate bleiben auch für Systeme bestehen, die mehr als abzählbar unendlich viele Gleichungen enthalten. Die Überlegungen des § 8 gelten ohne weiteres auch für diesen Fall, und es ist daher die Existenz einer Zahl M von der Art, daß für jedes endliche Teilsystem und beliebige Zahlen μ_i die Ungleichung (21) statthabe, auch hier eine notwendige Lösbarkeitsbedingung. Ist diese Bedingung erfüllt, so enthält das System endliche oder abzählbare Teilsysteme, die ihm äquivalent sind. Dies und mithin das Hinreichen der Bedingung folgt aus dem Satze, daß jede Menge der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ endliche oder abzählbar unendliche Teilmengen enthält derart, daß jedes Element der Menge ein Element jener Teilmenge ist oder durch solche in bezug auf den Exponenten $\frac{p}{p-1}$ stark approximiert werden kann. Der Beweis dieser Behauptung für beliebige Mengen bedarf eines viel diskutierten Auswahlprinzips; für jene Mengen jedoch, die wir in der Folge betrachten werden, ergibt sich das Vorhandensein entsprechender Teilmengen unmittelbar aus unseren früheren Entwickelungen.

Ein äußerst wichtiger Fall ist der folgende: Die Koeffizientenfunktionen $f(x)$ machen die ganze Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ aus. In diesem Falle ergeben nach § 4 jene streckenweise konstante Funktionen, für welche alle Konstanzstrecken rationale Teile der Gesamtstrecke sind und die auch nur rationale Werte annehmen, eine im obigen Sinne überall dichte, abzählbare Teilmenge. Man hat somit den Satz:

Wird durch eine Vorschrift jeder Funktion $f(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ eine Zahl A_f zugeordnet, und genügt diese Zuordnung den Forderungen:

$$(30)\qquad \begin{cases} A_{\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2} = \mu_1 A_{f_1} + \mu_2 A_{f_2}; \\ |A_f| \leqq M \left[\int\limits_a^b |f(x)|^{\frac{p}{p-1}}\, dx\right]^{\frac{p-1}{p}}, \end{cases}$$

wo die Schranke M nur von der Vorschrift abhängt, so gibt es eine bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmte Funktion $a(x)$ der Klasse $[L^p]$ derart, daß für alle $f(x)$

$$A_f = \int\limits_a^b a(x) f(x)\, dx$$

ist.

Für $p = 2$ hatte ich den Satz als eine Folge meines Satzes über trigonometrische Reihen ausgesprochen.*) Zu gleicher Zeit hat den Satz auch Frèchet entwickelt.**)

Man kann den Satz (für beliebige $p > 1$) auch ohne Anwendung der allgemeinen Betrachtungen über Gleichungssysteme leicht herleiten. Wir definieren zu diesem Zwecke zunächst die Funktion $A(\xi)$ durch die Vorschrift:

$$A(\xi) = A_{f(x,\xi)}; \quad f(x, \xi) = {1 \atop 0} \quad \text{für} \quad x \lesseqgtr \xi,$$

und behaupten, daß $A(x)$ ein unbestimmtes Integral einer Funktion $a(x)$ der Klasse $[L^p]$ darstellt. Nach den Entwickelungen des § 5 ist diese Behauptung begründet, wenn wir nur zeigen, daß für jede mögliche Einteilung der Strecke (a, b) in Teilstrecken (x_k, x_{k+1}) $(k = 0, 1, \cdots, m-1)$ die Summe

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|A(x_{k+1}) - A(x_k)|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}}$$

unterhalb einer absoluten Schranke liegt. Zu diesem Zwecke definieren wir eine Funktion $f(x)$ durch die Vorschrift:

$$f(x) = \frac{|A(x_{k+1}) - A(x_k)|^{p-1} \overline{\operatorname{sign}} (A(x_{k+1}) - A(x_k))}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}} \quad (x_k \leq x < x_{k+1}).$$

Dann ist

$$\int_a^b |f(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|A(x_{k+1}) - A(x_k)|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}} \tag{31}$$

und zufolge der in (30) ausgedrückten Distributivität auch

$$A_f = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{|A(x_{k+1}) - A(x_k)|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}} \tag{32}$$

Aus (30), (31) und (32) folgt

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{|A(x_{k+1}) - A(x_k)|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}} \leqq M^p.$$

---

*) F. Riesz, „Sur une espèce de Géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables“, l. cit. An Stelle von (30) steht dort die scheinbar allgemeinere Voraussetzung, daß A_{f_i} gegen A_f geht, wenn nur $f_i(x)$ stark gegen $f(x)$ konvergiert. Man zeigt leicht für beliebige p, daß aus dieser Voraussetzung und aus der Distributivität auch (30) folgt. Vgl. das analoge Problem betreffend Linearformen abzählbar unendlich vieler Veränderlichen: E. Hellinger u. O. Toeplitz, „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen“, Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen 1906, S. 351—355; E. Landau, „Über einen Konvergenzsatz“, l. cit.

**) M. Fréchet, „Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires“, l. cit.

Also gibt es eine bis auf eine additive Nullfunktion bestimmte Funktion $a(x)$ der Klasse $[L^p]$ derart, daß $A(x)$ ein Integral von $a(x)$ darstellt.

Nun aber folgt unmittelbar aus der Definition der Funktionen $A(x)$, $a(x)$ das Bestehen der Identität

$$A_\varphi = \int_a^b a(x)\,\varphi(x)\,dx$$

für jede streckenweise konstante Funktion $\varphi(x)$. Auf Grund des in § 4 entwickelten Satzes, nach welchem für jede Funktion $f(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ das Integral

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx$$

durch entsprechende Wahl von $\varphi(x)$ beliebig klein wird, überträgt sich die Identität auf alle Funktionen $f(x)$.

§ 12.

Die lineare Funktionaltransformation.

Über die *Funktionaltransformation* $T[f(x)]$, welche jeder Funktion der Klasse $[L^p]$ eine Funktion derselben Klasse zuordnet, setzen wir voraus, daß sie *distributiv und in bezug auf den Exponenten* p *beschränkt sei.* Die Transformation heißt distributiv, wenn identisch für alle f

$$T[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 T[f_1(x)] + c_2 T[f_2(x)]$$

ist; die Identität ist so aufzufassen, daß sich die auf beiden Seiten stehenden Ausdrücke höchstens um eine additive Nullfunktion unterscheiden. Beschränkt in bezug auf den Exponenten p heißt die Transformation dann, wenn es eine absolute Konstante M_T*) gibt derart, daß für alle Funktionen $f(x)$, für welche

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx \leqq 1$$

ist, das mit der transformierten Funktion gebildete Integral

$$\int_a^b |T(f(x))|^p\,dx \leqq M_T^p$$

ausfällt. Eine zugleich distributive und in bezug auf den Exponenten p

*) Wir setzen sofort fest, daß wir in den weiteren Entwicklungen *unter* M_T *immer die kleinstmögliche positive Zahl von der hier angegebenen Eigenschaft verstehen.*

beschränkte Transformation nennen wir eine *lineare Transformation der Klasse* $[L^p]$.

Es bedeute nun $f(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse $[L^p]$, $g(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$. Da auch $T[f(x)]$ eine Funktion der Klasse $[L^p]$ ist, so existiert sicher das Integral

$$\int_a^b T[f(x)]h(x)\,dx$$

und es ist

$$(35)\qquad \left|\int_a^b T[f(x)]g(x)\,dx\right| \leqq M_T\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

Hält man in dem Integrale die Funktion $g(x)$ fest, so stellt es somit eine auf der Klasse $[L^p]$ lineare Funktionaloperation dar. Nach unserem Satze über die Darstellbarkeit der linearen Operation gibt es somit eine bis auf eine beliebige additive Nullfunktion wohlbestimmte Funktion $\psi(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ derart, daß für jede Funktion $f(x)$

$$\int_a^b T[f(x)]\,g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx$$

ausfällt.

Auf diese Art wird jeder Funktion $g(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ eine Funktion $\psi(x)$ derselben Klasse zugeordnet. Da diese Zuordnung, wie soeben erwähnt wurde, bis auf eine additive Nullfunktion eindeutig ist, so folgt aus der Gleichung

$$\int_a^b T[f(x)]\{c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)\}\,dx = c_1\int_a^b f(x)\,\psi_1(x)\,dx + c_2\int_a^b f(x)\,\psi_2(x)\,dx$$

die Distributivität der Zuordnung. Die Beschränktheit der Zuordnung in bezug auf den Exponenten $\frac{p}{p-1}$ wird durch die Ungleichung (35) gesichert; auch sieht man sofort, daß die zugehörige absolute Konstante $= M_T$ ist.

Die Vorschrift

$$\int_a^b T[f(x)]g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\mathfrak{T}[g(x)]\,dx$$

definiert somit eine lineare Transformation $\mathfrak{T}[g(x)]$ *der Klasse* $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$; *für dieselbe ist*

$$M_{\mathfrak{T}} = M_T.$$

Durch dieselbe Vorschrift wird, wenn die Transformation $\mathfrak{T}$ die gegebene ist, die Transformation T definiert.

Die Transformation $\mathfrak{T}[g(x)]$ heißt die *Transponierte* zur Transformation $T[f(x)]$; letztere Transformation heißt wieder Transponierte zu $\mathfrak{T}[g(x)]$.

Die identischen Transformationen der Klassen $[L^p]$, $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ sind zueinander transponiert.

§ 13.

Umkehrung der linearen Funktionaltransformation.

Es bedeute $T[f(x)]$ irgend eine lineare Transformation der Klasse $[L^p]$, $\mathfrak{T}[g(x)]$ die zu ihr transponierte Transformation der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$. Wir fragen nach der Lösbarkeit der Funktionalgleichung

$$T[\xi(x)] = f(x). \tag{34}$$

Darin bedeutet $f(x)$ die gegebene, $\xi(x)$ die gesuchte Funktion aus der Klasse $[L^p]$. Das Gleichheitszeichen ist bis auf eine additive Nullfunktion zu deuten.

Laut der Entwicklungen des vorhergehenden Paragraphen ist die Gleichung (34) *gleichwertig dem mit sämtlichen Funktionen* $g(x)$ *der Klasse* $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ *gebildeten Gleichungssystem*

$$\int_a^b \xi(x)\,\mathfrak{T}[g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx. \tag{35}$$

Das Gleichungssystem kann durch endlich oder abzählbar unendlich viele Gleichungen ersetzt werden; man kann hierfür z. B. wieder die Gesamtheit der in § 12 benutzten speziellen streckenweise konstanten Funktionen heranziehen; denn zufolge der Linearität der Transformation $\mathfrak{T}$ kann man jede Funktion $\mathfrak{T}[g(x)]$ durch jene, die nach Anwendung derselben Transformation aus diesen speziellen Funktionen hervorgehen, $\left(\text{in bezug auf } \frac{p}{p-1}\right)$ stark approximieren. Man darf daher das in § 11 formulierte Kriterium auch auf das System (35) anwenden. Beachtet man noch, daß das System der $\mathfrak{T}[g(x)]$ alle linearen Verbindungen dieser Funktionen mit enthält, so ergibt sich:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der Funktionalgleichung (34) *durch eine Funktion* $\xi(x)$, *für welche*

$$\int_a^b |\xi(x)|^p dx \leqq M^p$$

ausfällt, besteht darin, daß die Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqq M\left[\int_a^b |\mathfrak{T}[g(x)]|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

für alle Funktionen $g(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ erfüllt ist.

Auf Grund des soeben bewiesenen Satzes können wir nun auch die folgende Frage beantworten: Unter welchen Bedingungen gibt es eine lineare Transformation T^{-1} der Klasse $[L^p]$ derart, daß für alle Funktionen $f(x)$ dieser Klasse die Gleichung (34) gleichwertig sei der Gleichung

$$T^{-1}[f(x)] = \xi(x);$$

mit andern Worten: unter welchen Bedingungen gibt es zu T eine lineare *Umkehrtransformation?*

In der Zeichensprache der linearen Substitutionen drückt sich unsere Forderung durch die Gleichungen

$$(36) \qquad TT^{-1} = T^{-1}T = E$$

aus. Bedeutet $\mathfrak{T}^{-1}$ die Transponierte von T^{-1}, so sind die Gleichungen, wie aus der Definition der Transponierten unmittelbar folgt, gleichbedeutend mit den folgenden:

$$(37) \qquad \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}\mathfrak{T}^{-1} = E.$$

Nehmen wir an, es gebe eine Transformation T^{-1}. Es sei

$$M = M_{T^{-1}} = M_{\mathfrak{T}^{-1}}$$

die zugehörige absolute Konstante. Dann bestehen sicher die Ungleichungen

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leqq M^p \int_a^b |T[f(x)]|^p dt,$$

$$\int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \leqq M^{\frac{p}{p-1}} \int_a^b |\mathfrak{T}[g(x)]|^{\frac{p}{p-1}} dx,$$

und zwar für jede Funktion f aus $[L^p]$ und jede Funktion g aus $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$. Das Bestehen dieser Ungleichungen für eine Zahl M ist somit eine notwendige Bedingung für die Existenz einer umkehrenden Transformation, wenn man noch verlangt, daß die absolute Konstante derselben $\leqq M$ ausfalle. Wir zeigen, daß die Bedingung auch hinreicht.

Durch Anwendung der Ungleichung (5) leitet man aus den obigen Ungleichungen die für alle f aus $[L^p]$ und alle g aus $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ richtigen Ungleichungen

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqq M\left[\int_a^b |T[f(x)]^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqq M\left[\int_a^b |\mathfrak{T}[g(x)]^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}}\left[\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

ab. Auf Grund des oben ausgesprochenen Satzes besitzen somit die Gleichungen

$$\mathfrak{T}[\eta(x)] = g(x), \tag{38}$$

$$T[\xi(x)] = f(x) \tag{39}$$

sicher solche Lösungen $\eta(x)$ resp. $\xi(x)$, für welche

$$\int_a^b |\eta(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx \leqq M^{\frac{p}{p-1}}\int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx, \tag{40}$$

$$\int_a^b |\xi(x)|^p\,dx \quad \leqq M^p\int_a^b |f(x)|^p\,dx \tag{41}$$

ausfallen. Und zwar besitzt jede der beiden Gleichungen im wesentlichen nur diese einzige Lösung. Denn die Differenz $\delta(x)$ zweier Lösungen z. B. der ersten Gleichung müßte die homogene Gleichung

$$\mathfrak{T}[\delta(x)] = 0,$$

also auch das gleichwertige System

$$\int_a^b T[\varphi(x)]\,\delta(x)\,dx = 0, \tag{42}$$

wo $f(x)$ die ganze Klasse $[L^p]$ durchläuft, befriedigen. Da jedoch, wie wir soeben gezeigt haben, die Gleichung

$$T[\varphi(x)] = f(x)$$

für alle Funktionen f aus $[L^p]$ gelöst werden kann, so dürfen wir das System (42) durch das System

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x)\,dx = 0$$

ersetzen, wo auch f die ganze Klasse $[L^p]$ durchläuft. Setzt man speziell

$$f(x) = |\delta(x)|^{\frac{1}{p-1}}\,\overline{\text{sign}}\,\delta(x),$$

so folgt

$$\int_a^b |\delta(x)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx = 0;$$

d. h. $\delta(x)$ ist eine Nullfunktion.

Durch die Gleichungen (38), (39) *wird also jeder Funktion* $f(x)$ *der Klasse* $[L^p]$ *eine Funktion* $\xi(x)$ *derselben Klasse, und auch jeder Funktion* $g(x)$ *der Klasse* $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ *eine Funktion* $\eta(x)$ *derselben Klasse im wesentlichen eindeutig zugeordnet.* Die *Distributivität* dieser Zuordnung folgt unmittelbar aus der Linearität der definierenden Gleichungen und der Eindeutigkeit der Lösung. Die *Beschränktheit* der Zuordnungen ist durch die Ungleichungen (40), (41) gesichert. Demgemäß *definieren jene Zuordnungsvorschriften zwei lineare Transformationen* T^{-1}, $\mathfrak{T}^{-1}$; und auf Grund der Definition dieser Transformationen schließt man sofort, daß dieselben zueinander transponiert sind und auch die Forderungen (36), (37) erfüllen.

Man hat damit den Satz:

Die lineare Transformation $T[f(x)]$ *der Klasse* $[L^p]$ *besitzt dann und nur dann eine lineare Transformation* T^{-1} *als eindeutige Umkehrung, wenn es eine Zahl* M *gibt derart, daß für alle* $f(x)$ *aus* $[L^p]$ *und alle* $g(x)$ *aus* $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \leqq M^p \int_a^b |T[f(x)]|^p dx,$$

$$\int_a^b |g(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \leqq M^{\frac{p}{p-1}} \int_a^b |\mathfrak{T}[g(x)]|^{\frac{p}{p-1}} dx$$

*ausfallen.**)

Ist diese Bedingung erfüllt und bedeutet M_1 *die kleinste Zahl* M, *bei welcher noch die erste Ungleichung für alle* f *besteht,* M_2 *die entsprechende Zahl für die zweite Ungleichung, so ist*

$$M_1 = M_2 = M_{T^{-1}} = M_{\mathfrak{T}^{-1}}.$$

§ 14.

Die Funktionalgleichung $\xi(x) - \lambda K[\xi(x)] = f(x)$. Der symmetrische Fall.

Es bedeute K eine beliebige lineare Transformation der Klasse $[L^p]$; λ sei ein veränderlicher Parameter. Die obige Funktionalgleichung ist eine Verallgemeinerung der bekannten Fredholmschen Integralgleichung.

Das Problem, die Funktionalgleichung für jeden einzelnen Wert von λ in bezug auf ihre Lösbarkeit zu untersuchen, läßt sich bei beliebigem Ex-

*) Den entsprechenden Satz für Substitutionen mit abzählbar unendlich vielen Veränderlichen hat im Falle $p = 2$ O. Toeplitz entwickelt: „Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen", Göttingen, Nachrichten, 1907, S. 101—109. Vgl. auch den äußerst einfachen Beweis von E. Hilb: „Über die Auflösung von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten", Sitzungsberichte der Phys.-Med. Sozietät Erlangen 1908, S. 84—89.

ponenten p mit unseren Hilfsmitteln vollständig erledigen. Unsere Kriterien liefern eine theoretisch exakte Antwort; und in gewissen, sehr allgemeinen Fällen geben sie auch die Mittel an die Hand, das Verhalten der Lösungen als Funktionen von λ in der Umgebung isoliert singulärer Parameterwerte zu untersuchen.

Wir beschränken uns hier auf einige Betrachtungen bei $p = 2$*) und behandeln auch nur gewisse spezielle Typen der Funktionalgleichung, bei denen die Anwenduug unserer Resultate sich äußerst einfach und natürlich gestaltet. Wir entwickeln zunächst den folgenden Satz:

Bedeutet M_K die der Transformation K entsprechende (kleinste) absolute Konstante, so ist obige Funktionalgleichung für alle Parameterwerte λ, für welche

$$|\lambda| < \frac{1}{M_K}$$

ausfällt, sicher eindeutig lösbar und die Transformation $E - \lambda K$ hat eine eindeutig bestimmte Umkehrung.

Um den Satz zu beweisen, hat man zu zeigen, daß die Bedingungen des Satzes in § 13 für die Transformation $T = E - \lambda K$, wie auch für die Transformierte $\mathfrak{T} = E - \lambda \mathfrak{K}$ erfüllt sind, sobald λ der obigen Ungleichung genügt.

Da zu den beiden Transformierten K und $\mathfrak{K}$ dieselbe absolute Konstante gehört, genügt es, die Bedingung für die erstere der beiden Transformationen T und $\mathfrak{T}$ als erfüllt nachzuweisen. Dies folgt nun unmittelbar aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned}\left\{\int_a^b |T[\xi(x)]|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} &= \left\{\int_a^b |\xi(x) - \lambda K[\xi(x)]|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\geqq \left\{\int_a^b |\xi(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} - |\lambda| \left\{\int_a^b |K[\xi(x)]|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\geqq (1 - |\lambda| M_K) \left\{\int_a^b |\xi(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}};\end{aligned}$$

setzt man nämlich

$$\frac{1}{1 - |\lambda| M_K} = M,$$

so erhält man

$$\left\{\int_a^b |\xi(x)|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \leqq M \left\{\int_a^b |T[\xi(x)]|^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

d. i. die postulierte Ungleichung. Damit ist unser Satz bewiesen.

*) Diese Einschränkung ist jedoch nur bei der Behandlung symmetrischer Transformationen wesentlich.

Über die Werte λ, für welche $|\lambda| = \frac{1}{M_K}$ ist, läßt sich allgemein nichts aussagen. Im *reell symmetrischen Falle* dagegen kann man sicher behaupten, daß *wenigstens einer der beiden Parameterwerte* $\lambda = \pm \frac{1}{M_K}$ *für die Funktionalgleichung singulär ist.* Es gilt nämlich der Satz:

Ist K eine reell symmetrische Transformation), so kann man wenigstens eine der beiden Funktionalgleichungen*

$$\int_a^b \left| \xi(x) \mp \frac{1}{M_K} K[\xi(x)] \right|^2 dx = 0$$

mit beliebiger Approximation durch Funktionen $\xi(x)$ *lösen, die noch der Bedingung*

$$\int_a^b |\xi(x)|^2 dx = 1$$

unterworfen sind. Die entsprechende Transformation $E \pm \frac{1}{M_K}$ *ist dann nicht mittels einer linearen Transformation umkehrbar.*

Wäre nämlich unsere Behauptung unrichtig, so würde es eine positive Zahl M^2 geben derart, daß für jede Funktion $f(x)$ der Klasse $[L^2]$ die Ungleichungen

$$\int_a^b \left| f(x) - \frac{1}{M_K} K[f(x)] \right|^2 dx \geqq \frac{1}{M^2} \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

statthätten. Somit wäre auch, wenn $K^2[f(x)]$ die durch wiederholte Anwendung von K entstandene Transformation bedeutet,

$$\int_a^b \left| f(x) - \frac{1}{M_K^2} K^2[f(x)] \right|^2 dx$$

$$(43) \qquad = \int_a^b \left| f(x) - \frac{1}{M_K} K[f(x)] + \frac{1}{M_K} K\left[f(x) - \frac{1}{M_K} K[f(x)] \right] \right|^2 dx$$

$$\geqq \frac{1}{M^2} \int_a^b \left| f(x) - \frac{1}{M_K} K[f(x)] \right|^2 dx \geqq \frac{1}{M^4} \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

---

*) D. i. wenn K jede reelle Funktion in eine reelle überführt und $K = \mathfrak{K}$ ist. Die Ausführungen über den reell symmetrischen Fall gelten natürlich, leicht modifiziert, auch für den Fall, wo für alle reellen Funktionen $K = \overline{\mathfrak{K}}$ ausfällt. Vgl. D. Hilbert, „Grundzüge etc.“, 4. Mitteilung, l. cit., S. 216.

Andererseits aber ist

$$\int_a^b |K^2[f(x)]|^2\,dx \leqq M_K^2 \int_a^b |K[f(x)]|^2\,dx \leqq M_K^4 \int_a^b |f(x)|^2\,dx.$$

Ferner gibt es, da $K = \mathfrak{K}$ und M_K die zugehörige kleinste Konstante bedeutet, sicher eine Funktion $f(x)$ derart, daß

$$\int_a^b K^2[f(x)]\,\bar{f}(x)\,dx = \int_a^b |K[f(x)]|^2\,dx > M_K^2\left(1 - \frac{1}{2M^4}\right)\int_a^b |f(x)|^2\,dx$$

ausfällt. Für diese Funktion $f(x)$ ist dann

$$\int_a^b \left|f(x) - \frac{1}{M_K^2} K^2[f(x)]\right|^2 dx$$

$$= \int_a^b |f(x)|^2\,dx - \frac{2}{M_K^2}\int_a^b K^2[f(x)]\,\bar{f}(x)\,dx + \frac{1}{M_K^4}\int_a^b |K^2[f(x)]|^2\,dx$$

$$< \int_a^b |f(x)|^2\,dx\left\{1 - 2\left(1 - \frac{1}{2M^4}\right) + 1\right\} = \frac{1}{M^4}\int_a^b |f(x)|^2\,dx.$$

Dies aber widerspricht der Ungleichung (43). Damit ist die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen.*)

Man kann den soeben hier bewiesenen Satz auch als eine Weiterführung und Präzisierung des Hilbertschen Existenzsatzes in der Theorie der linearen homogenen Integralgleichung auffassen. Jener Satz behauptet die Existenz wenigstens einer reellen stetigen, nicht identisch verschwindenden Lösung der Integralgleichung

$$\xi(x) - \lambda\int_a^b K(x, y)\,\xi(y)\,dy = 0,$$

in welcher λ einen verfügbaren, reellen Parameter, $K(x, y)$ eine gegebene, in den beiden Veränderlichen symmetrische Funktion bedeutet, die stetig ist, oder wenigstens gewissen, hier nicht näher zu beschreibenden Stetigkeitsbedingungen unterworfen wird.**) Wesentlich für uns ist nur, daß diese Bedingungen der linearen Transformation

*) Unser Satz läßt sich auch leicht aus der Hilbertschen Normaldarstellung der beschränkten quadratischen Formen („Grundzüge IV"; l. cit.), wie auch natürlich aus dem Toeplitzschen Kriterium mit Hilfe des Satzes über die Existenz von Funktionen mit vorgegebenen Fourier-Konstanten ableiten.

**) D. Hilbert, „Grundzüge etc." 1. Mitteilung, Nachrichten d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1904, S. 49—91.

$$K[f(x)] = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy$$

einerseits die später zu definierende Eigenschaft der *Vollstetigkeit*, andererseits noch die weitere Eigenschaft sichern, *daß sie alle Funktionen der Klasse* $[L^2]$ *in stetige Funktionen überführt.* Man kann schon jetzt bemerken, daß es dank dieser letzteren Eigenschaft genügt, überhaupt die Existenz einer nichttrivialen Lösung aus $[L^2]$ der Gleichung

$$\xi(y) - \lambda \int_a^b K(x, y)\, \xi(y)\, dy = \text{Nullfunktion}$$

zu beweisen, denn die Funktion

$$\xi^*(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, \xi(y)\, dy$$

liefert dann eine *stetige* Lösung der ursprünglichen Integralgleichung.

Bevor wir den Begriff der vollstetigen Transformation erklären, sei uns noch folgende Bemerkung gestattet, die für alle Funktionenklassen $[L^p]$ gilt. Aus der Definition der linearen Transformation folgt unmittelbar, daß, wenn eine Folge $\{f_n(x)\}$ stark gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert, dies auch für die Folge $\{T[f_n(x)]\}$ und die Funktion $T[f(x)]$ der Fall ist. Weniger evident ist, daß bei jeder linearen Transformation *auch die schwache Konvergenz erhalten bleibt.* Dies folgt nun aus der Existenz der transponierten Transformation. Konvergiert nämlich die Folge $\{f_n(x)\}$ schwach gegen die Funktion $f(x)$, so gelten für jede Funktion $h(x)$ der Klasse $\left[L^{\frac{p}{p-1}}\right]$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\int_a^b T[f(x)]\, h(x)\, dx &= \int_a^b f(x)\, \mathfrak{T}[h(x)]\, dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\, \mathfrak{T}[h(x)]\, dx \\ &= \lim_{n=\infty} \int_a^b T[f_n(x)]\, h(x)\, dx.\end{aligned}$$

Auf Grund dieser Bemerkung lassen sich unsere letzten Resultate noch etwas weiter ausbauen. Nehmen wir z. B. an, man könne die Gleichung

$$\int_a^b \left| \xi(x) - \frac{1}{M_K} K[\xi(x)] \right|^2 dx = 0 \tag{44}$$

durch Funktionen vom Quadratintegral 1 mit beliebiger Approximation befriedigen. Es sei also $\{\xi_n(x)\}$ eine Folge von Funktionen dieser Art, für welche die Grenzgleichung

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b \left| \xi_n(x) - \frac{1}{M_K} K[\xi_n(x)] \right|^2 dx = 0 \tag{45}$$

besteht. In dieser Folge ist dann sicher eine Teilfolge $\{\xi_n'(x)\}$ enthalten, welche (in bezug auf den Exponenten 2) schwach gegen eine Grenzfunktion $\xi^*(x)$ konvergiert. Dann konvergiert auch die Folge

$$\left\{ \xi_n'(x) - \frac{1}{M_K} K[\xi_n'(x)] \right\}$$

schwach gegen die Funktion $\xi^*(x) - \frac{1}{M_K} K[\xi^*(x)]$. Aus der Grenzgleichung (45) folgt dann durch Anwendung des Hilfssatzes des § 11 die Gleichung

$$\int_a^b \left| \xi^*(x) - \frac{1}{M_K} K[\xi^*(x)] \right|^2 dx = 0.$$

Damit wäre die Existenz einer genauen Lösung der Gleichung (44) bewiesen, *wenn man nicht mit der Möglichkeit zu rechnen hätte, daß alle schwach konvergenten Folgen* $\{\xi_n'(x)\}$, *welche die Gleichung in der Grenze befriedigen, gegen Nullfunktionen konvergieren.* Dann gibt es eben nur diese Art trivialer Lösungen. Hier greift der Begriff der *Vollstetigkeit* ein. Bei vollstetiger Transformation K bleibt diese Möglichkeit ausgeschlossen.

Wir nennen nämlich eine Funktionaltransformation *vollstetig, wenn bei ihr jede schwach konvergente Folge in eine stark konvergente übergeht.**)

Ist nun die Transformation $K[f(x)]$ vollstetig, so konvergiert also die Folge $\{K[\xi_n'(x)]\}$ stark gegen die Funktion $K[\xi^*(x)]$. Daher ist

$$\int_a^b | K[\xi^*(x)] |^2 dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b | K[\xi_n'(x)] |^2 dx = M_K^2.$$

Also ist auch

$$\int_a^b | \xi^*(x) |^2 dx \geqq \frac{1}{M_K^2} \int_a^b | K[\xi^*(x)] |^2 dx = 1.$$

Somit ist $\xi^*(x)$ sicher keine Nullfunktion. Man kann noch bemerken, daß auf Grund von (16)

$$\int_a^b | \xi^*(x) |^2 dx \leqq 1$$

*) Diese Definition der Vollstetigkeit deckt sich mit der Hilbertschen („Grundzüge IV", l. cit.). Man zeigt nämlich leicht, daß eine Transformation in dem oben erläuterten Sinne dann und nur dann vollstetig ist, wenn die derselben bei Zugrundelegung irgend eines Orthogonalsystems entsprechende Bilinearform unendlich vieler Veränderlichen nach Hilberts Definition vollstetig ausfällt.

sein muß. Aus den beiden Ungleichungen folgt dann

$$\int_a^b |\xi^*(x)|^2 dx = 1 .$$

Man hat hiemit den Satz: *Ist* $K[f(x)]$ *eine reell symmetrische vollstetige lineare Transformation der Klasse* $[L^2]$, *so erreicht das bei der Nebenbedingung*

$$\int_a^b |\xi(x)|^2 dx = 1$$

variierte Integral

$$\int_a^b |K[\xi(x)]|^2 dx$$

*sicher sein Maximum.**)

Die vorstehende Betrachtung über vollstetige Transformationen gilt nicht nur für die Werte $\lambda = \frac{1}{M_K}$, resp. $\lambda = -\frac{1}{M_K}$, sondern für sämtliche Werte λ, bei denen die Gleichung

$$\int_a^b |\xi(x) - \lambda K[\xi(x)]|^2 dx = 0$$

durch Funktionen $\xi(x)$, für welche

$$\int_a^b |\xi(x)|^2 dx = 1$$

ausfällt, mit beliebiger Approximation befriedigt werden kann. Für alle diese Werte — die sogenannten *Eigenwerte* — ist die Gleichung auch genau durch Funktionen derselben Art — *Eigenfunktionen* — lösbar.

Auf Grund dieser Resultate läßt sich die Theorie der reell symmetrischen, vollstetigen Lineartransformationen, unter andern der Satz *über ihre Zerlegung in elementare Transformationen,* leicht begründen. Man folgert zunächst auf bekannte Art die Orthogonalität zweier verschiedenen Eigenwerten entsprechender reeller Eigenfunktionen. Für das Weitere bedient man sich mit Vorteil der Tatsache, daß *jede unendliche Folge von reellen, zueinander orthogonalen Funktionen von gleichem Quadratintegral schwach gegen 0 konvergiert.* Diese Tatsache erscheint als Korollar der bekannten Besselschen Identität. Aus ihr folgt, daß sich die Eigenwerte *sicher nicht*

*) Bezüglich des Zusammenhanges verwandter Variationsprobleme mit der homogenen Integralgleichung vgl. Hilbert, „Grundzüge etc." 1. Mitt., l. cit., S. 78; 5. Mitt., Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen 1906, S. 460; E. Holmgren, „Sur la théorie des équations intégrales linéaires", Arkiv för Matematik, Bd. 3, Nr. 1 (1906); F. Riesz, „A lineár homogén integrálegyenletről", Math. Termtt. Értesitő 1909, S. 220—240.

im Endlichen häufen, wie auch, daß die Anzahl der ein und demselben Eigenwerte entsprechenden, *linear unabhängigen**) Eigenfunktionen eine *endliche* ist.

Man erhält hiernach ohne Schwierigkeit den Satz über die Zerlegung der reell symmetrischen vollstetigen Transformation in die Summe gewisser höchstens abzählbar unendlich vieler Transformationen elementarer Art, welcher dem Hilbertschen Satze über die Normalzerlegung einer reellen quadratischen Form entspricht. Man ordnet zu diesem Zwecke jedem Eigenwerte λ_i eine Transformation K_i zu; K_i wird durch folgende Eigenschaft bestimmt: sie ordnet jede zu dem Eigenwerte λ_i gehörige Eigenfunktion sich selbst zu, alle zu diesen Eigenfunktionen konjugiert orthogonalen Funktionen führt sie in 0 über. Durch diese Eigenschaft werden die Transformationen K_i im wesentlichen eindeutig festgelegt. Es bedeute $f_i^{(1)}(x), f_i^{(2)}(x), \cdots, f_i^{(m_i)}(x)$ ein System zum Eigenwerte λ_i gehörender Eigenfunktionen, die reell, vom Quadratintegral 1 sind, zueinander orthogonal stehen und durch welche jede zu demselben Eigenwerte gehörende Eigenfunktion (bis auf eine Nullfunktion) linear ausgedrückt werden kann**), so ist

$$K_i[f(x)] = \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{m_i} f_i^{(j)}(x) f_i^{(j)}(y)\right] f(y)\,dy.$$

Die Transformationen K_i sind, wie leicht zu sehen, vollstetig, reell und symmetrisch. Dasselbe gilt von den Transformationen

$$(46)\qquad \begin{aligned} S_n[f(x)] &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} K_i[f(x)], \\ R_n[f(x)] &= K[f(x)] - S_n[f(x)]. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$(47)\qquad S_n R_n = R_n S_n = 0.$$

Es bedeute nun M_{R_n} die zur Transformation R_n gehörende absolute Konstante. Dann ist einer der beiden Werte $\pm\frac{1}{M_{R_n}}$ ein Eigenwert der Transformation R_n; es gibt somit sicher eine reelle Funktion $f(x)$, die nicht Nullfunktion ist und eine der beiden Gleichungen

*) „Linear unabhängig" ist im Sinne der über Nullfunktionen gemachten Annahme zu deuten.

**) Reeller und imaginärer Teil einer zu einem reellen Eigenwerte einer reellen Transformation gehörenden Eigenfunktion sind, wie man leicht erkennt, selbst Eigenfunktionen; eine derselben ist sicher nicht Nullfunktion, sobald es die ursprüngliche Funktion nicht ist. Demgemäß kann das obige Fundamentalsystem rein reell gewählt werden.

$$(48)\qquad \int_a^b \left[f(x) \mp \frac{1}{M_{R_n}} R_n[f(x)]\right]^2 dx = 0$$

befriedigt. Aus (47) und (48) folgt, daß diese Funktion $f(x)$ durch S_n in eine Nullfunktion übergeführt wird. Daraus folgt weiter einerseits, daß die Funktion $f(x)$ zu allen Eigenfunktionen, die den Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ entsprechen, orthogonal steht, daß sie also unter diesen Eigenfunktionen sicher nicht enthalten ist. Andererseits folgt auf Grund von (46), daß im wesentlichen

$$R_n[f(x)] = K[f(x)]$$

ist, daß also $f(x)$ auch die Gleichung

$$\int_a^b \left[f(x) \mp \frac{1}{M_{R_n}} K[f(x)]\right]^2 dx = 0,$$

wo dasselbe Vorzeichen wie in (48) zu gelten hat, befriedigt. Der entsprechende Wert $\pm \frac{1}{M_{R_n}}$ ist somit ein Eigenwert von K, der jedoch von den Werten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sicher verschieden ist; er ist daher unter den Werten $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \cdots$ enthalten. Daraus folgt aber, daß M_{R_n} *mit unbegrenzt wachsendem n der Grenze* 0 *zustrebt, d. h. es ist*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b | K[f(x)] - S_n[f(x)] |^2 dx = 0$$

u. zw. gleichmäßig für alle $f(x)$, für welche die Werte

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx$$

unterhalb derselben Schranke liegen. In diesem Sinne wird die Transformation $K[f(x)]$ durch die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} K_i[f(x)],$$

die über alle reellen Eigenwerte λ_i zu erstrecken ist, dargestellt.

Aus der gegebenen Darstellung der vollstetigen, reell symmetrischen Transformation K folgt unmittelbar, daß jede mit irgend welchem nicht reellen Parameterwerte λ gebildete Transformation

$$E - \lambda K$$

eine beschränkte Umkehrung besitzt. Dies folgt übrigens auch für alle reell symmetrischen — nicht notwendig vollstetigen — Transformationen, wenn man $\lambda = \mu + i\nu$ setzt, aus der Ungleichung

$$\int_a^b |f(x) - (\mu + i\nu) K[f(x)]|^2 dx = (\mu^2 + \nu^2) \int_a^b \left| \frac{\mu}{\mu^2 + \nu^2} f(x) - K[f(x)] \right|^2 dx$$

$$+ \frac{\nu^2}{\mu^2 + \nu^2} \int_a^b |f(x)|^2 dx \geqq \frac{\nu^2}{\mu^2 + \nu^2} \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

auf Grund des in § 13 entwickelten Kriteriums.*)

§ 15.

Fortsetzung: Der Volterrasche Typus.

Es bedeute $K[f(x)]$ eine beliebige lineare Transformation der Klasse $[L^2]$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Transformation $E - \lambda K$ bei einem bestimmten Werte von λ eine lineare Funktionaltransformation als eindeutige Umkehrung besitze, ist nach § 13 die Existenz einer Zahl M derart, daß für alle Funktionen $f(x)$ der Klasse $[L^2]$ die Ungleichungen

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leqq M \int_a^b |f(x) - \lambda K[f(x)]|^2 dx,$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leqq M \int_a^b |f(x) - \lambda \mathfrak{K}[f(x)]|^2 dx$$

bestehen. Mit andern Worten: Die Transformation $E - \lambda K$ läßt sich dann und nur dann eindeutig durch eine lineare Transformation umkehren, wenn keine der beiden Gleichungen

$$(49) \qquad \int_a^b |\xi(x) - \lambda K[\xi(x)]|^2 dx = 0,$$

$$(50) \qquad \int_a^b |\xi(x) - \lambda \mathfrak{K}[\xi(x)]|^2 dx = 0$$

durch Funktionen $\xi(x)$, für welche

---

*) Vgl. E. Hellinger, „Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen“, Habilitationsschrift, Marburg 1909, S. 51 [auch Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 136].

$$\int_a^b |\xi(x)|^2 dx = 1$$

ausfällt, mit beliebiger Annäherung gelöst werden kann.*)

Wir zeigen in diesem Paragraphen, daß, wenn $K[f(x)]$ einer gewissen Klasse von Transformationen angehört, die obige Bedingung für alle endlichen Werte λ erfüllt ist.

Wir entwickeln zu diesem Zwecke zunächst einige Sätze über vollstetige Transformationen.

Satz I. *Ist $K[f(x)]$ eine vollstetige Transformation, so ist es auch die Transformation $\mathfrak{K}[f(x)]$.*

Beweis. Die Funktionenfolge $\{f_i(x)\}$ konvergiere schwach gegen die Funktion $f(x)$. Es soll gezeigt werden, daß

$$\lim_{i=\infty} \int_a^b |\mathfrak{K}[f(x) - f_i(x)]|^2 dx = 0$$

ist.

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_a^b |\mathfrak{K}[f(x) - f_i(x)]|^2 dx &= \int_a^b K\left[\bar{\mathfrak{K}}[\bar{f}(x) - \bar{f}_i(x)]\right][f(x) - f_i(x)]\, dx \\ \text{(51)} \qquad &\leqq \left[\int_a^b \left|K\left[\bar{\mathfrak{K}}[\bar{f}(x) - \bar{f}_i(x)]\right]\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^a |f(x) - f_i(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq G\left[\int_a^b \left|K\left[\bar{\mathfrak{K}}[\bar{f}(x) - \bar{f}_i(x)]\right]\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = G J_i \end{aligned}$$

wo G die obere Grenze der Werte

$$\left[\int_a^b |f(x) - f_i(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

bedeutet.

Da ferner die Folge $\{f(x) - f_i(x)\}$ schwach gegen 0 konvergiert, so ist dies auch, wie wir im letzten Paragraphen gezeigt haben, für die Folge $\{\mathfrak{K}[f(x) - f_i(x)\}$ und somit auch für die konjugierte Folge

*) Man zeigt auch leicht, daß für Werte λ, die ausschließlich von regulären Parameterwerten umgeben sind, beide Ungleichungen zugleich stehen oder fallen. Für solche Werte genügt somit schon die Betrachtung einer einzigen der beiden Gleichungen (49), (50), um über die Regularität derselben zu entscheiden. Bei vollstetigen Transformationen ist dies für alle Parameterwerte der Fall. Daraus folgt mit Hilfe des Satzes II. dieses Paragraphen die bekannte Tatsache, daß bei vollstetigen K entweder $E - \lambda K$ umkehrbar ist, oder aber die Gleichungen (49), (50) genaue Lösungen zulassen, die nicht Nullfunktionen sind.

$\{\mathfrak{K}[\bar{f}(x) - \bar{f}_i(x)\}$ der Fall. Daraus folgt aber, da K eine vollstetige Transformation ist, daß die Folge $\{K[\mathfrak{K}[\bar{f}(x) - \bar{f}_i(x)]]\}$ stark gegen 0 konvergiert. Somit ist

$$\lim_{i=\infty} J_i = 0,$$

und also auf Grund der Ungleichung (51) auch

$$\int_a^b |\mathfrak{K}[f(x) - f_i(x)]|^2 dx = 0.$$

Satz II. *Ist $K[f(x)]$ eine vollstetige Transformation und ist die Gleichung* (49) *durch Funktionen $\xi(x)$, für welche*

$$\int_a^b |\xi(x)|^2 dx = 1$$

ausfällt, mit beliebiger Annäherung lösbar, so ist sie auch genau durch Funktionen derselben Art lösbar.

Der Beweis wird ähnlich geführt, wie jener des im vorigen Paragraphen entwickelten spezielleren Satzes. Ist $\{\xi_i(x)\}$ eine Folge unbegrenzt approximierender Lösungen, so gibt es nach § 7 sicher eine Teilfolge $\{\xi_i'(x)\}$, welche schwach gegen eine Funktion $\xi^*(x)$ konvergiert. Durch Anwendung von (16) folgt dann, daß $\xi^*(x)$ eine genaue Lösung der Gleichung (49) darstellt. Es ist zu zeigen, daß $\xi^*(x)$ keine Nullfunktion ist. Aus der Ungleichung

$$|\lambda|\left[\int_a^b |K[\xi_i(x)]|^2 dx\right] \geqq \left[\int_a^b |\xi_i(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} - \left[\int_a^b |\xi_i(x) - \lambda K[\xi_i(x)]|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

folgt, da K vollstetig ist,

$$|\lambda|\left[\int_a^b |K[\xi^*(x)]|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \geqq 1.$$

Also ist $\xi^*(x)$ sicher keine Nullfunktion.

Satz III. *Ist $K[f(x)]$ eine vollstetige Transformation, c eine von b verschiedene Stelle der Strecke (a, b), δ eine beliebig gegebene positive Größe, so gibt es eine Zahl $d > c$ derart, daß für jede Funktion $f(x)$, für welche*

$$\int_c^d |f(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

ausfällt (d. i. welche auf den Strecken (d, b) und ev. (a, c) durchweg ver schwindet), die Ungleichung

$$\int_a^b |K[f(x)]|^2 dx \leqq \delta^2 \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

besteht.

Wäre nämlich der Satz nicht richtig, so müßte es eine vollstetige Transformation $K[f(x)]$, eine Stelle $c < b$, eine Zahl $\delta^2 > 0$, eine Folge von Stellen $d_1 > d_2 > d_3 > \cdots$, $\lim d_i = c$ und eine entsprechende Funktionenfolge $\{f_i(x)\}$ geben, derart, daß für alle diese Funktionen die Gleichungen

$$\int_c^{d_i} |f_i(x)|^2 dx = \int_a^b |f_i(x)|^2 dx = 1$$

und die Ungleichungen

$$\int_a^b |K[f_i(x)]^2 dx > \delta^2 \tag{52}$$

statthätten. Zufolge der Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(x) f_i(x)\, dx\right| = \left|\int_c^{d_i} f(x) f_i(x)\, dx\right| \leqq \left[\int_c^{d_i} |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

müßte die Folge $\{f_i(x)\}$ schwach gegen 0 konvergieren; dann aber würde, da K vollstetig ist, die Folge $\{K[f_i(x)]\}$ stark gegen 0 konvergieren. Diese Möglichkeit widerspricht jedoch der Ungleichung (52).

Wir wenden nun diese drei Sätze auf eine Funktionaltransformation $K[f(x)]$ an, *welche vollstetig ist und dabei noch folgende Eigenschaft besitzt: Ist*

$$\int_a^y |f(x)|^2 dx = 0,$$

so ist auch

$$\int_a^y |K[f(x)]|^2 dx = 0.$$

Ist $K[f(x)]$ eine solche Transformation, so sagen wir, die Funktionalgleichung

$$\varphi(x) - \lambda K[\xi(x)] = f(x)$$

sei vom *Volterraschen Typus.* Volterra hat sich nämlich, wie wohl bekannt ist, mit Integralgleichungen beschäftigt, die in diese Klassifikation eintreten.

Wir zeigen nun, daß *für eine Gleichung vom Volterraschen Typus die zum Anfange dieses Paragraphen auseinandergesetzte Bedingung immer* (*also bei allen Werten* λ) *erfüllt ist.*

Wäre nämlich jene Bedingung nicht erfüllt, so könnte man wenigstens eine der beiden Gleichungen (49), (50) mit beliebiger Annäherung, auf Grund der Sätze I, II also auch genau durch eine Funktion $\xi(x)$ befriedigen, für welche

$$\int_a^b |\xi(x)|^2 dx = 1$$

wäre. Nehmen wir an, es wäre dies für (34) der Fall. Es sei nun $c (a \leqq c < b)$ jene Stelle der Strecke (a, b), für welche, wenn $a \neq c$,

$$\int_a^c |\xi(x)|^2 dx = 0,$$

jedoch für alle $d > c$

$$\int_c^d |\xi(x)|^2 dx > 0$$

ausfällt. Wir wählen nun die Stelle d derart, daß dieselbe die Forderung des Satzes III bei $\delta = \frac{1}{2|\lambda|}$ erfülle. Dann ist, wenn $\xi_1(x)$ jene Funktion bedeutet, welche auf der Strecke $(a, d) = \xi(x)$, auf der Strecke $(d, b) = 0$ ist,

$$|\lambda|^2 \int_c^d |K[\xi(x)]|^2 dx = |\lambda|^2 \int_a^b |K[\xi_1(x)]|^2 dx \leqq \frac{1}{4} \int_a^b |\xi_1(x)|^2 dx = \frac{1}{4} \int_c^d |\xi(x)|^2 dx.$$

Dies aber widerspricht der Ungleichung

$$|\lambda| \left[\int_c^d |K[\xi(x)]|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \geqq \left[\int_c^d |\xi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\int_c^d |\xi(x) - \lambda K[\xi(x)]|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\int_c^d |\xi(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Auf ähnliche Art wird gezeigt, daß auch (50) nur durch Nullfunktionen befriedigt werden kann, was ja nach den Sätzen I und II auch die Unmöglichkeit der approximativen Lösung im angegebenen Sinne nach sich zieht. Bei Anwendung des Satzes III muß man jedoch beachten, daß die Gleichung

$$\xi(x) - \lambda \mathfrak{K}[\xi(x)] = f(x)$$

nicht von demselben Typus, wie (53), ist; daß aber die Transformation

$\mathfrak{K}[f(x)]$, die nach I. ebenfalls vollstetig ist, *die Eigenschaft besitzt, daß, sobald*

$$\int_y^b |f(x)|^2 dx = 0$$

ist, auch

$$\int_y^b |\mathfrak{K}[f(x)]|^2 dx = 0$$

ausfällt. Hat man diese Eigenschaft erkannt, so führt die entsprechende Umgestaltung des Satzes III. zum Ziele. Nun aber folgt jene Eigenschaft, wenn man

$$\varphi(x) = \begin{matrix} 0 \\ \mathfrak{K}[f(x)] \end{matrix} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} a \leqq x \leqq y \\ y < x \leqq b \end{matrix}$$

setzt, aus den Gleichungen

$$\int_y^b |\mathfrak{K}[f(x)]|^2 dx = \int_a^b \overline{\varphi}(x)\, \mathfrak{K}[f(x)]\, dx = \int_a^b K[\overline{\varphi}(x)]\, f(x)\, dx$$

$$= \int_y^b K[\overline{\varphi}(x)] f(x)\, dx.$$

§ 16.

Übertragung der Resultate auf Funktionen, die auf einer beliebigen meßbaren Menge erklärt sind. Ein Übertragungsprinzip.

Wir hatten in den §§ 4—15 vorausgesetzt, daß die betrachteten Funktionen auf einer Strecke definiert werden. Diese einschränkende Voraussetzung ist keineswegs notwendig. *Unsere Resultate gelten für alle entsprechenden Klassen von Funktionen, die für eine meßbare Menge beliebiger Dimension von nicht verschwindendem Inhaltsmaße erklärt werden; es ist natürlich auch der Begriff des Inhaltsmaßes entsprechend zu deuten.*

In meinen ersten Arbeiten über den hier behandelten Gegenstand hatte ich einen Weg angedeutet, der im Falle $p = 2$ zu dieser Verallgemeinerung der Resultate führt.*) In diesem Falle genügt es nämlich, auf jener Menge ein einziges vollständiges, reell orthogonales Funktionensystem zu erklären und auf dasselbe den in der Einleitung zitierten Satz zu übertragen; das übrige wird dann schon durch die Analysis unendlich vieler Veränderlicher geleistet.**)

---

*) Vgl. F. Riesz, „Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm", l. cit.

**) Es handelt sich dabei natürlich zunächst um die Übertragung der entsprechenden Resultate der §§ 6—15. Will man auch die früheren Entwicklungen übertragen, Ist p beliebig, so könnte man versuchen, von Anfang an mit beliebigen meßbaren Mengen zu arbeiten, was ja auch keine wesentlichen Schwierigkeiten verursachen dürfte, wenn man nur die grundlegenden Definitionen und Resultate über meßbare Mengen derart umarbeitet, daß in denselben der Strecke keine ausgezeichnete Rolle zukommt, was man z. B. durch axiomatische Grundlegung erreichen kann. Bei einzelnen Resultaten wird man auch dies vermeiden können, indem man dieselben mittels Methoden begründet, die sich ohne weiteres auch bei beliebigen Mengen verwenden lassen.*)

Bei den meisten Resultaten führt nun auch das folgende Übertragungsprinzip zum Ziele, das wir hier nicht weiter begründen: *Ist eine meßbare Menge $\mathfrak{M}$ von beliebiger Dimension und vom Inhaltsmaße m gegeben, so kann man diese Menge im wesentlichen ein-eindeutig auf eine Strecke von der Länge m derart abbilden, daß jeder meßbaren Teilmenge der einen Menge eine meßbare Teilmenge der anderen Menge, und zwar von gleichem Inhaltsmaße entspreche.* Der Ausdruck „im wesentlichen ein-eindeutig" ist folgendermaßen zu erklären: Für jede der beiden Mengen bilden jene Punkte, denen in der andern Menge kein Punkt oder mehr als ein Punkt zugeordnet wird, je eine Nullmenge.

---

so ist der Begriff der Teilstrecke durch Auszeichnung gewisser Teilmengen zu ersetzen. Dieselbe Bemerkung gilt auch für Satz III des § 15 und die nachfolgenden Entwicklungen über Gleichungen vom Volterraschen Typus.

*) Vgl. meine Arbeit: „Sur les suites de fonctions mesurables", l. cit., wo unter andern die in § 7 der vorliegenden Arbeit entwickelte Ausdehnung des Fischerschen Satzes durch eine Methode begründet wird, die unmittelbare Übertragung gestattet. Vgl. auch H. Weyl, „Über die Konvergenz von Reihen etc.", l. cit.